Uniwersytet Marii-Curie Skłodowskiej
w Lublinie
Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki

Twierdzenia o punktach stałych dla półgrup odwzorowań nieliniowych względem słabych topologii

Fixed point theorems for semigroups of nonlinear mappings in weak topologies

Sławomir Borzdyński

Rozprawa doktorska
napisana pod kierunkiem
dr. hab. Andrzeja Wiśnickiego, prof. UP

Lublin, 2021

Spis treści

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Jednym z podstawowych wyników w teorii punktów stałych jest twierdzenie Markowa-Kakutaniego, które orzeka istnienie wspólnego punktu stałego dla rodziny przemiennych odwzorowań ciągłych i afinicznych wypukłego zbioru zwartego w przestrzeni liniowo-topologicznej. Spośród licznych jego zastosowań warto wymienić niezmienniczą wersję twierdzenia Hahna-Banacha oraz istnienie średniej niezmienniczej dla półgrup przemiennych. Półgrupy przemienne są ważnym przykładem półgrup dopuszczających niezmienniczą średnią, które były rozważane po raz pierwszy przez J. von Neumanna w latach 30 ubiegłego wieku.

W 1961 roku M. Day scharakteryzował półgrupy dopuszczające lewostronnie niezmienniczą średnią za pomocą własności punktu stałego dla przekształceń afinicznych, która przypomina twierdzenie Markowa-Kakutaniego: półgrupa dopuszcza średnią lewostronnie niezmienniczą wtedy i tylko wtedy, gdy działając z lewej strony w sposób ciągły i afiniczny na wypukły i zwarty podzbiór przestrzeni lokalnie wypukłej ma punkt stały. Naturalne pytanie, postawione przez A. T.-M. Lau w 1976 roku, dotyczy w pełni nieliniowego odpowiednika takiej charakteryzacji (por. rozdział 5).

Hipoteza Lau: *półgrupa S dopuszcza lewostronnie niezmienniczą średnią*

wtedy i tylko wtedy, gdy działając w sposób ciągły i 1*-lipschitzowski na wypukły i słabo** *zwarty podzbiór dualnej przestrzeni Banacha ma punkt stały.*

Ponieważ zbiór wszystkich średnich na przestrzeni $\ell^\infty(S)$ (tzn. takich liniowych, ciągłych i dodatnio określonych funkcjonałów $\mu : \ell^\infty(S) \to \mathbb{R}$, że $\mu(\mathbb{I}) = 1$) jest wypukłym i słabo* zwartym podzbiorem przestrzeni $\ell^\infty(S)^*$, więc stosunkowo łatwo można udowodnić implikację z prawej strony do lewej (warunek dostateczny). Trudność hipotezy Lau polega na udowodnieniu warunku koniecznego. W 1991 roku Lau w [La] rozszerzył powyższą hipotezę na półgrupy semitopologiczne. Pomimo wysiłków wielu badaczy hipoteza Lau pozostaje otwarta nawet w swojej klasycznej wersji.

Poniższa praca prezentuje wyniki uzyskane podczas badania tej hipotezy. Jakkolwiek samej hipotezy nie udało się udowodnić, wykazano pewne przypadki szczególne, między innymi dla półgrup przemiennych oraz reprezentacji regularnie nieoddalających. W szczególności odkryto nową własność półgrupy, która gwarantuje prawdziwość hipotezy Lau. Warto zauważyć, że własność tę z jednej strony posiadają wszystkie półgrupy przemienne, a z drugiej strony każda półgrupa o tej własności dopuszcza lewostronnie niezmienniczą średnią.

Oprócz otrzymania wyników związanych bezpośrednio z hipotezą Lau, powstałe techniki zostały zastosowane do badania przekształceń afinicznych oraz nieoddalających lub afinicznych retrakcji.

1.2 Omówienie pracy

Jednym z najważniejszych wyników pracy jest twierdzenie 4.4.10 udowodnione w [Bo], które pokazuje, że dla wielu topologii zbiór (wspólnych) punktów stałych przemiennej rodziny ciągłych i nieoddalających przekształceń zwartego (w tej topologii) i wypukłego podzbioru przestrzeni Banacha jest nie tylko niepusty, ale jest on nawet nieoddalającym (tzn. 1-lipschitzowskim) retraktem tego zbioru. Dowód wykorzystuje metodę retrakcyjną Brucka i szereg nowych, nietrywialnych obserwacji dotyczących własności ciągów przybli-

żonych punktów stałych. Ponieważ powyższe twierdzenie można zastosować do zbiorów wypukłych i słabo* zwartych, zatem w szczególności otrzymujemy potwierdzenie hipotezy Lau w ważnym przypadku półgrup przemiennych (por. [BoWi]).

Całościowe rozwiązanie hipotezy wymaga wypracowania nowych metod. Ogniwem łączącym przypadek przemienny i nieprzemienny jest własność istnienia niezmienniczego zbioru zwartego ($\mathcal{SC}$), na którym cała rodzina operatorów jest suriektywna. Niemal cały rozdział drugi jest poświęcony wprowadzaniu półgrup, których ciągłe reprezentacje posiadają własność ($\mathcal{SC}$), ustalaniu relacji pomiędzy nimi oraz badaniu ich podstawowych własności.

Okazuje się, że jeśli jednostajnie asymptotycznie regularny operator jest suriekcją, to musi być operatorem identycznościowym (por. lemat 3.1.2). Powyższa obserwacja w połączeniu z własnością ($\mathcal{SC}$) prowadzi w naturalny sposób do badania w rozdziale trzecim różnych wariantów asymptotycznej regularności rodzin przekształceń. W szczególności twierdzenie 3.3.3 orzeka, że rodzina wszystkich regularnie nieoddalających przekształceń dowolnego ograniczonego podzbioru przestrzeni Banacha jest uniwersalnie jednostajnie asymptotycznie regularna. Dowód wykorzystuje „zwykłą” asymptotyczną regularność takiej rodziny oraz analogon metody Goebla-Kirka dla rodzin przekształceń uśrednionych nieoddalających. Ogólne twierdzenia o punkcie stałym z podrozdziału 3.4 pozwalają teraz m.in. na potwierdzenie hipotezy Lau w przypadku ciągłych reprezentacji półgrupy dopuszczającej lewostronnie niezmienniczą średnią generowanych przez przekształcenia regularnie nieoddalające (por. twierdzenia 3.4.8 i 5.2.5). Część rozważań rozdziału trzeciego jest prowadzona przy najbardziej ogólnych możliwych założeniach i chociaż zastosowania prezentowane w tej rozprawie nie potrzebują aż takiej abstrakcji, to jednak wyizolowanie tych własności przekształceń i przestrzeni, które pozwalają na otrzymanie odpowiednich twierdzeń może okazać się w przyszłości pożyteczne[1].

[1]Autor zainicjował prace nad nową samodzielną publikacją, która przy wykorzystaniu wariantu uogólnionej asymptotycznej regularności powinna zaowocować między in-

Niejako przy okazji, techniki kombinatoryczne w podrozdziale 3.2 prowadzą do potwierdzenia hipotezy Xu i Yamady na temat tempa asymptotycznej regularności przekształceń afinicznych, których wszystkie potęgi są wspólnie ograniczone (por. uwagę 3.2.9).

Rozważania rozdziałów drugiego i trzeciego pozwalają teraz spojrzeć głębiej na metodę retrakcyjną Brucka i wspomniane na początku wyniki dotyczące hipotezy Lau w przypadku półgrup przemiennych. W szczególności otrzymujemy m.in. ciekawe twierdzenie 4.2.10 o afinicznej retrakcji, które zdaje się uogólniać twierdzenie Markowa-Kakutaniego. Rozdział kończy się uogólnieniem twierdzenia Brucka na półgrupy o tzw. własności ($\mathcal{W}$).

W ostatnim piątym rozdziale zebrane są nowe i znane częściowe wyniki dotyczące hipotezy Lau. W tym kontekście podanych jest także kilka obserwacji dotyczących własności ($\mathcal{W}$).

Wyniki przedstawione w niniejszej rozprawie zostały jak dotąd zamieszczone w trzech publikacjach - dwóch napisanych wspólnie z promotorem autora, profesorem Andrzejem Wiśnickim (patrz [BoWi], [BoWi2] oraz jednej napisanej samodzielnie (patrz [Bo]). Niektóre z wyników umieszczonych w rozprawie nie zostały jeszcze opublikowane. Ważniejsze wyniki, które autorowi udało się odkryć samodzielnie:

- Zmodyfikowanie dowodu twierdzenia 3.2.9 (w stosunku do przedstawionego w pracy [BoWi2]) w sposób pozwalający potwierdzić wspomnianą wyżej hipotezę Xu i Yamady. Kluczowy okazał się być lemat 3.2.7, także potwierdzony samodzielnie przez autora.

- Twierdzenie 3.3.3, które wzmacnia lemat 3.2 z pracy [BoWi] pokazując, że jednostajna asymptotyczna regularność przekształceń regularnie nieoddalających jest uniwersalna.

- Twierdzenia 3.3.5 i 3.3.7 pokazujące przy jakich warunkach rodziny

nymi nietrywialnym twierdzeniem dotyczącym przekształceń afinicznych w przestrzeniach liniowo-topologicznych. Wyniki są obiecujące, jednak zbyt przedwczesne żeby umieszczać je w niniejszej rozprawie.

przekształceń afinicznych są uniwersalnie jednostajnie asymptotycznie regularne.

- Obserwacja pod postacią twierdzenia 3.3.8 pokazująca, że twierdzenie Kirka i Goebla o uniwersalnie jednostajnym asymptotycznie regularnym zachowaniu przekształceń nieoddalających można wzmocnić.

- Zauważenie, że wyniki pracy [BoWi] opierają się między innymi na własności, którą autor nazywa własnością skończonych retrakcji. Wyabstrahowanie owej definicji pozwoliło zauważyć i sformułować kilka nowych twierdzeń (patrz rozdział 4.3).

- Wspomniane wcześniej twierdzenie 4.4.10; pierwsza wersja dowodu została przedstawiona w samodzielnej pracy autora. Dalsze modyfikacje zaowocowały odkryciem nieprzemiennego odpowiednika (pod postacią twierdzenia 4.4.20) razem ze wspomnianą wcześniej własnością[2] $(\mathcal{W})$ i jej kuzynką, własnością $(\mathcal{W}')$. Przy tej okazji autor poczynił prostą, ale (w odczuciu autora) ciekawą obserwację o tym, jak z asymptotycznej regularności przekształceń uśrednionych nieoddalających wynika istnienie ciągów przybliżonych punktów stałych przekształceń nieoddalających (lemat 4.4.2 wraz z twierdzeniem 4.4.3).

- Zauważenie, że jedno z przekształceń wykorzystywanych w dowodzie twierdzenia 4.4.10 jest regularnie nieoddalające pozwoliło uzyskać mocniejszy przypadek szczególny - twierdzenie 4.4.19.

- Uogólnienie twierdzenia o nieoddalającej retrakcji z pracy Brucka [Br2] na półgrupy o własności $(\mathcal{W})$, a w zasadzie ogólniejszej własności $(\mathcal{B})$; patrz podrozdział 4.5.

- Zauważenie, że otrzymane wyniki dają nowe przypadki szczególne, kiedy hipoteza Lau jest prawdziwa: twierdzenia 5.2.6 i 5.2.7.

[2]Potwierdzono też nietrywialność owej własności; patrz definicja 4.4.21

Przy tej okazji autor chciałby złożyć podziękowania dla profesora Wiśnickiego za wsparcie i pomoc. Podziękowania należą się także prof. dr. hab. Adamowi Bobrowskiemu z Politechniki Lubelskiej oraz prof. Bożenie Piątek z Politechniki Śląskiej za szczegółowe recenzje pierwszej wersji niniejszej pracy.

1.3 Założenia, konwencje, podstawowe definicje

Przyjmujemy, że wszystkie przestrzenie topologiczne, jakimi będziemy się zajmować są przestrzeniami Hausdorffa. Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczną nazywamy przestrzenią Hausdorffa albo T_2, jeśli dla dwóch dowolnych punktów tej przestrzeni istnieją rozłączne otoczenia tych punktów. Czasem będziemy powtarzać założenie o tym, że przestrzeń jest typu T_2, jeśli owe założenie jest użyte wprost.

Definicja 1.3.1 (Przestrzeń regularna)**.** *Przestrzeń topologiczną Hausdorffa C nazwiemy regularną (albo T_3), jeśli dla każdego domkniętego zbioru $A \subset C$ i $x \in A'$ istnieją takie rozłączne otwarte zbiory U i V, że $x \in U$ i $A \subset V$.*

Przestrzenie T_3 mają następującą własność[3]:

Lemat 1.3.2. *W przestrzeniach regularnych, dla dowolnego otoczenia W danego punktu x, istnieje takie otoczenie U tego samego punktu, że $\overline{U} \subset W$.*

Dowód. Niech W będzie otwarte. W oznaczeniach z definicji 1.3.1, przyjmijmy $A = W'$. Wtedy A jest domknięte oraz $x \in A'$. Z regularności mamy takie rozłączne otwarte zbiory U, V, że $x \in U$ i $A \subset V$. Stąd:

- $V' \subset A'$,
- $V \subset U'$, równoważnie $U \subset V'$.

[3] Można pokazać, że własność podana w powyższym lemacie jest warunkiem równoważnym regularności.

Ponieważ V' jest domknięte, ostatecznie mamy

$$x \in \overline{U} \subset V' \subset A' = W.$$

Tak więc U rzeczywiście spełnia tezę lematu. □

Przykładem przestrzeni regularnych są przestrzenie liniowo-topologiczne, to jest przestrzenie liniowe z topologią, w której działania dodawania wektorów i mnożenia przez skalar są ciągłe.

Mając topologię τ, domknięcie zbioru A w tej topologii oznaczać będziemy przez $\overline{A}^{\tau}$. Gdy to tylko możliwe, będziemy starali się opuszczać oznaczenie topologii, to jest pisać przykładowo „zbiór zwarty" zamiast „zbiór τ-zwarty". Sytuacje, w których dopuszczać się będziemy takiego uproszczenia obejmują przypadki, gdy wypowiadamy twierdzenie w ogólnej przestrzeni topologicznej albo topologia, której twierdzenie dotyczy jest „domyślną" dla danej przestrzeni (na przykład topologia generowana przez normę przestrzeni unormowanej).

Przekształcenie nazywamy otwartym, jeśli przekształca zbiory otwarte na zbiory otwarte. Analogicznie przekształcenie nazywamy domkniętym, jeśli przekształca zbiory domknięte na zbiory domknięte. Zachodzi

Lemat 1.3.3. *Odwzorowanie T zwartego zbioru C jest przekształceniem domkniętym (jeśli przeciwdziedzina jest typu T_2).*

Dowód. Niech $A \subset C$ będzie domknięte. Oczywiście A jest zwarte. Stąd ciągłość T gwarantuje, że $T(A)$ jest zwarte. A ponieważ w przestrzeni Hausdorffa zwarte podzbiory zawsze są domknięte, z dowolności wyboru A wynika, że T jest przekształceniem domkniętym. □

Restrykcją przekształcenia $T : C \to C$ do zbioru $A \subset C$ nazwiemy przekształcenie $T_{|A} : A \to T(A)$ zdefiniowane równaniem

$$T_{|A}x = Tx,\ x \in A.$$

Gdy mamy do czynienia z rodziną przekształceń $\mathcal{S}$, to definiujemy restrykcję rodziny:

$$\mathcal{S}_{|A} = \{T_{|A} : T \in \mathcal{S}\}.$$

Podzbiór $A \subset C$ nazwiemy niezmienniczym dla T, jeśli $TA \subset A$. Analogicznie powiemy, że A jest niezmienniczy dla $\mathcal{S}$, jeśli dla każdego $T \in \mathcal{S}$, zbiór A jest niezmienniczy dla T. Podobnie powiemy, że rodzina $\mathcal{S}$ jest suriektywna, jeśli każdy jej element jest suriekcją, to jest przekształceniem „na". Analogicznie definiujemy przykładowo rodziny iniektywne, itp. W szczególności powiemy, że rodzina przekształceń jest przemienna, jeśli dla dwóch dowolnych odwzorowań T, S z tej rodziny zachodzi warunek $TS = ST$. Mówimy też, że przekształcenia z rodziny komutują.

Mając daną rodzinę przekształceń, biorąc wszystkie skończone złożenia przekształceń z tej rodziny, możemy utworzyć półgrupę przekształceń – większą rodzinę przekształceń, która ma strukturę półgrupy (z działaniem złożenia). Przypomnijmy, że półgrupą nazywamy zbiór z łącznym działaniem, które jest wewnętrzne w tym zbiorze. Punktem stałym przekształcenia $T : C \to C$ nazwiemy punkt $x \in C$, taki że $Tx = x$. Zbiór wszystkich punktów stałych przekształcenia oznaczamy przez $Fix\, T$. Podobnie definiujemy $Fix\, \mathcal{S}$ jako zbiór tych wszystkich $x \in C$, że x jest punktem stałym dla każdego $T \in \mathcal{S}$. Wielokrotnie korzystać będziemy z następującego lematu:

Lemat 1.3.4. *Dla ciągłego przekształcenia T zbiór $Fix\, T$ jest zbiorem domkniętym.*

Dowód. Niech ciąg uogólniony $(x_\alpha) \subset Fix\, T$ ma granicę x. Wtedy

$$Tx = T \lim_\alpha x_\alpha = \lim_\alpha Tx_\alpha = \lim_\alpha x_\alpha = x.$$

□

Oczywiście lemat jest także prawdziwy dla rodzin (ciągłych) przekształceń.

Duża część przedstawionych twierdzeń dotyczy przekształceń nieoddalających. Przypomnijmy, że przekształcenie $T : C \to C$ nazywamy nieoddalającym, jeśli

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|, \; x, \, y \in C.$$

Powyższa definicja w prosty sposób przenosi się na przestrzenie metryczne. Szczególnym przypadkiem przekształcenia nieoddalającego jest izometria:

$$\|Tx - Ty\| = \|x - y\|\,.$$

Inna klasa przekształceń którymi będziemy się interesować to przekształcenia afiniczne:

$$T(\alpha x + \overline{\alpha} y) = \alpha\, Tx + \overline{\alpha}\, Ty,\ x,\ y \in C,\ \alpha \in (0,1).$$

Przyjmujemy $\overline{\alpha} = 1 - \alpha$ oraz zakładamy tutaj wypukłość zbioru C.

W wielu miejscach posługujemy się funkcjami anonimowymi. Wyrażenie

$$C \ni x \mapsto f(x) \in D$$

oznacza funkcję ze zbioru C na zbiór D, które dla $x \in C$ przyjmuje wartość $f(x)$. Będziemy czasem opuszczać dziedzinę lub przeciwdziedzinę przekształcenia, jeśli ich znajomość będzie wynikała z kontekstu.

Przekształcenie tożsamościowe (identyczność) zbioru A oznaczamy przez $\mathbb{I}_A$. W większości przypadków zbiór A będzie znany z kontekstu, dlatego najczęściej będziemy opuszczać dolny indeks.

Dla danej przestrzeni liniowo-topologicznej E, definiujemy jej ciągłą przestrzeń dualną E^* jako zbiór wszystkich ciągłych funkcjonałów liniowych na E. Wtedy:

- topologią słabą (weak) na E nazywamy najmniejszą topologię, w której funkcjonały liniowe z E^* są ciągłe,

- topologią słabą* na E^* nazywamy najmniejszą topologię, w której funkcjonały postaci

  $$E^* \ni f \mapsto f(e),\ e \in E$$

  są ciągłe.

Definicja 1.3.5 (Norma dolnie półciągła)**.** *Niech dana będzie przestrzeń z normą* $\|\cdot\|$ *oraz topologia* τ *zadana na tej przestrzeni. Powiemy że norma* $\|\cdot\|$ *jest* τ*-dolnie półciągła, jeśli*

$$\left\|\tau\text{-}\lim_{\alpha} x_\alpha\right\| \leq \liminf_{\alpha} \|x_\alpha\|$$

dla każdego zbieżnego ciągu uogólnionego (x_α) przestrzeni.

Powyższa definicja może być uogólniona dla przestrzeni metrycznych po przyjęciu

$$d(\tau\text{-}\lim_\alpha x_\alpha, 0) \leq \liminf_\alpha d(x_\alpha, 0).$$

Norma jest zarówno słabo, jak i słabo* dolnie półciągła.

Jednym z pierwszych narzędzi, jakim posłużymy się w tej pracy będzie lemat Kuratowskiego-Zorna mówiący, że jeśli w zbiorze częściowo uporządkowanym każdy łańcuch ma ograniczenie górne, to zbiór posiada element maksymalny.

W dużej mierze poruszać będziemy się w przestrzeniach Banacha, to jest unormowanych przestrzeniach liniowych, w których metryka wyznaczona przez normę jest zupełna, to znaczy każdy ciąg Cauchy'ego tej przestrzeni musi posiadać granicę. Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem Cauchy'ego jeśli

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n,m>N}\, \|a_n - a_m\| < \epsilon.$$

Półgrupy dopuszczające średnią

Wspominana już kilkukrotnie własność *dopuszczania (lewostronnie niezmienniczej) średniej* przez półgrupę zdefiniowana została w podrozdziale 2.3. Jest to odpowiednik angielskojęzycznej nazwy *(left) amenable semigroup*. Nadmienić należy, że w niektórych ośrodkach w Polsce na określenie półgrup posiadających ową własność używa się terminu *półgrupa średniowalna*, jest on jednak niepoprawny.

Zgodnie z opinią przedstawioną w [Sm] przez filologa polskiego z KUL, specjalistkę od poprawnej polszczyzny, panią dr hab. Magdalenę Smoleń–Wawrzusiszyn, przymiotniki z sufiksem -*alny* tworzyć można zarówno od czasowników, jak i od rzeczowników. Jednakże formalnym warunkiem poprawności terminu *średniowalny* jest istnienie akceptowalnego w terminologii specjalistycznej słowa *średniować*. Gdyby słowo takie istniało, pochodzący od niego przymiotnik oznaczałby obiekty, które można średniować. Skoro

czasownika takiego nie ma, to nie ma też podstaw do utworzenia wspomnianego przymiotnika.

M. Smoleń-Wawrzusiszyn stwierdza też, że jeśli podstawą interesującego nas przymiotnika jest rzeczownik *średnia*, to jego poprawna forma brzmiałaby *średnialny* i miałaby znaczenie „związany ze średnią, dotyczący średniej" – byłaby zatem podobna do słów „mitochondrialny" i „hegemonialny". Niestety termin *średnialny* zdaje się nie oddawać sensu tego co chcemy wyrazić mówiąc o grupach (czy półgrupach) będących *amenable*. Językoznawczyni proponuje ze swojej strony określenie *grupa średniowa*, które spełnia zarówno kryterium poprawności, jak i kryterium ekonomiczności (to jest termin powinien być możliwie krótki).

Ponieważ powyższa propozycja nie została jeszcze poddana ocenie środowiska, autor postanowił zostać przy określeniu „półgrupa dopuszczająca średnią" jako, że jest ono już używane w dyskursie naukowym oraz spełnia kryterium poprawności.

Rozdział 2

Przemienność i jej uogólnienia

2.1 Proste uogólnienia

Udowodnimy najpierw następujący lemat, który stanowić będzie punkt wyjścia naszych dalszych rozważań.

Lemat 2.1.1. *Dowolna przemienna rodzina $\mathcal{S}$ ciągłych przekształceń przestrzeni topologicznej posiada następującą własność (Surjective-Compact):*

($\mathcal{SC}$) *Dla dowolnego zwartego zbioru X, który jest niezmienniczy dla $\mathcal{S}$, istnieje taki zwarty podzbiór $C \subset X$, że rodzina $\mathcal{S}_{|C}$ jest suriektywna (tzn. każdy element tej rodziny jest suriekcją).*

Dowód. Niech X będzie zwartym zbiorem, który jest niezmienniczy dla $\mathcal{S}$. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną niepustych, zwartych podzbiorów $A \subset X$, które są niezmiennicze dla $\mathcal{S}$. Oczywiście $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (bo X jest takim zbiorem). Uporządkujmy rodzinę $\mathcal{A}$ kładąc

$$A \leq B \iff A \supset B,\ A, B \in \mathcal{A}.$$

Korzystając z własności skończonych przekrojów dla przestrzeni zwartych mamy

$$\sup \mathcal{B} = \bigcap_{A \in \mathcal{B}} A \neq \emptyset$$

dla dowolnego łańcucha $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Wynika stąd, że dowolny łańcuch w $\mathcal{A}$ ma ograniczenie górne, co na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna daje nam zwarty zbiór C, który jest niezmienniczy dla $\mathcal{S}$ i maksymalny w $\mathcal{A}$ względem relacji $\leq$ (czyli minimalny względem relacji zawierania).

Wybierzmy dowolne $T \in \mathcal{S}$ i zauważmy, że dla każdego $P \in \mathcal{S}$ zachodzi

$$PC \subset C \implies TPC \subset TC \implies PTC \subset TC,$$

co oznacza, że TC jest zbiorem niezmienniczym dla $\mathcal{S}$. Z ciągłości T wynika, że TC jest także zbiorem zwartym, czyli $TC \in \mathcal{A}$. Wobec oczywistej relacji $TC \subset C$ oraz minimalności zbioru C, otrzymujemy $TC = C$. Teza lematu wynika teraz z dowolności wyboru przekształcenia T. □

Własność $(\mathcal{SC})$ możemy traktować jako uogólnienie przemienności. Dalej wykorzystamy tę własność w dowodach kilku twierdzeń, a także podamy przykłady rodzin przekształceń (niekoniecznie przemiennych), które ową własność posiadają. Najpierw osłabimy warunek przemienności tak, żeby nie musiał zachodzić na całej dziedzinie rodziny.

Definicja 2.1.2. *Dla rodziny przekształceń $\mathcal{S}$ zbioru C, niech $\gamma\mathcal{S}$ oznacza maksymalny (względem inkluzji) podzbiór C, na którym półgrupa generowana przez elementy z rodziny $\mathcal{S}$ jest przemienna. Jeśli $\gamma\mathcal{S} \neq \emptyset$, to powiemy, że rodzina $\mathcal{S}$ jest przemienna przynajmniej w jednym punkcie (zbioru C).*

Podajmy podstawowe własności operacji γ.

Lemat 2.1.3. *Poniższe stwierdzenia są prawdziwe:*

1. *Zbiór $\gamma\mathcal{S}$ jest niezmienniczy dla $\mathcal{S}$.*

2. *$Fix\mathcal{S} \subset \gamma\mathcal{S}$.*

3. *Jeśli przekształcenia z $\mathcal{S}$ są ciągłe w pewnej topologii, to $\gamma\mathcal{S}$ jest zbiorem domkniętym w tej topologii.*

4. *Jeśli ponadto C jest zbiorem zwartym, to $\mathcal{S}$ jest rodziną suriektywną na zwartym podzbiorze A zbioru $\gamma\mathcal{S}$. Zbiór A można dobrać tak, aby zachodziło $Fix\mathcal{S} \subset A$.*

Dowód. Stwierdzenie (1).
Dla ustalonego $T \in \mathcal{S}$ weźmy $x \in \gamma\mathcal{S}$. Wtedy dla dowolnych $T_1, T_2 \in \mathcal{S}$ mamy

$$T_1T_2Tx = T_1(T_2T)x = T_2(TT_1x) = T_2T_1Tx$$

i z maksymalności $\gamma\mathcal{S}$ wnosimy, że $Tx \in \gamma\mathcal{S}$.
Stwierdzenie (2).
Jeśli $T_1, T_2 \in \mathcal{S}$ oraz $x \in Fix\mathcal{S}$, to oczywiście $T_1T_2x = x = T_2T_1x$ i $x \in \gamma\mathcal{S}$ z warunku maksymalności.
Stwierdzenie (3).
Weźmy ciąg uogólniony $(x_\alpha) \subset \gamma\mathcal{S}$, który ma granicę $\lim_\alpha x_\alpha = x$. Przekształcenia z rodziny $\mathcal{S}$ są przemienne w punkcie x:

$$T_1T_2x = T_1T_2 \lim_\alpha x_\alpha = \lim_\alpha T_1T_2x_\alpha = \lim_\alpha T_2T_1x_\alpha = T_2T_1 \lim_\alpha x_\alpha = T_2T_1x.$$

Po raz kolejny wykorzystując maksymalność $\gamma\mathcal{S}$ otrzymujemy tezę.
Stwierdzenie (4).
Zbiór $\gamma\mathcal{S} \subset C$ jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego, zatem sam jest zwarty. Ponieważ rodzina $\mathcal{S}$ z definicji jest przemienna na zbiorze $\gamma\mathcal{S}$, pierwsza część stwierdzenia wynika z własności $(\mathcal{SC})$ - otrzymujemy zbiór A.

Zauważmy teraz, że jeśli dla danego przekształcenia T restrykcje $T_{|B}$, $T_{|C}$ są suriekcjami, to $T_{|B\cup C}$ jest także suriekcją; ów fakt jest prawdziwy także dla rodzin przekształceń. Oczywiście rodzina $\mathcal{S}_{|Fix\mathcal{S}}$ jest suriektywna, a sam zbiór $Fix\mathcal{S}$ jest domknięty, czyli w naszym przypadku zwarty. Wobec powyższego oraz tego, że suma dwóch zwartych zbiorów także jest zwarta, wystarczy wziąć sumę zbiorów A i $Fix\mathcal{S}$, aby otrzymać drugą część stwierdzenia. □

Podsumowując: jeśli $\mathcal{S}$ jest rodziną ciągłych przekształceń pewnego zbioru zwartego, które są przemienne przynajmniej w jednym jego punkcie, to istnieje zwarty nadzbiór zbioru $Fix\mathcal{S}$, na którym rodzina $\mathcal{S}$ jest przemienna i suriektywna. Wspomnijmy przykładowo twierdzenie Freduenthala-Hurewicza ([FrHu][Twierdzenie Ib]) mówiące, że nieoddalająca suriekcja w zwartej przestrzeni metrycznej jest izometrią. Możemy teraz je uogólnić:

Twierdzenie 2.1.4. *Jeśli $\mathcal{S}$ jest rodziną nieoddalających przekształceń zwartego zbioru C (przestrzeni metrycznej), które są przemienne przynajmniej w jednym punkcie, to istnieje zwarty zbiór A taki, że zachodzi $Fix\mathcal{S} \subset A \subset C$ oraz $\mathcal{S}_{|A}$ jest rodziną suriektywnych przemiennych izometrii.*

Dowód. Weźmy zwarty zbiór A o którym mowa w lemacie 2.1.3. Stosując twierdzenie Freudenthala-Hurewicza widzimy, że $\mathcal{S}_{|A}$ jest przemienną rodziną suriektywnych izometrii. □

W szczególności możemy otrzymać bez odwoływania się do twierdzenia Banacha o kontrakcji następujący

Wniosek 2.1.5. *Rodzina $\mathcal{S}$ przemiennych (przynajmniej w jednym punkcie) kontrakcji zbioru zwartego posiada dokładnie jeden wspólny punkt stały.*

Dowód. Nasze kontrakcje, jako przekształcenia nieoddalające, spełniają założenia twierdzenia 2.1.4, a więc są przemiennymi suriektywnymi izometriami na pewnym zbiorze $A \supset Fix\mathcal{S}$. Izometryczne kontrakcje mogą być określone jedynie na zbiorze jednoelementowym, a więc $\#A = 1$. Implikuje to oczywiście $\#Fix\mathcal{S} \leq 1$. Ale z drugiej strony jedyny element zbioru A musi być punktem stałym rodziny $\mathcal{S}$ - zachodzi $\#Fix\mathcal{S} \geq 1$. Dlatego ostatecznie mamy $\#Fix\mathcal{S} = 1$. □

2.2 Lewostronna odwracalność

Definicja 2.2.1 (Półgrupa semitopologiczna)**.** *Niech S będzie półgrupą, a τ topologią na niej zadaną. Wtedy S nazywamy półgrupą τ-semitopologiczną, jeśli działanie półgrupy jest ciągłe w topologii τ, osobno względem każdego argumentu. Jeśli topologia τ jest dyskretna, to będziemy mówić, że S jest półgrupą dyskretną.*

Zauważmy, że każda półgrupa może być wyposażona w topologię dyskretną. W dalszej części będziemy zakładać, że S jest półgrupą semitopologiczną.

Definicja 2.2.2. *Półgrupę S nazywamy lewostronnie odwracalną, jeśli dla $s, t \in S$,*

$$\overline{sS} \cap \overline{tS} \neq \emptyset.$$

Wyrażenie sS definiujemy jako zbiór $\{sr : r \in S\}$.

Twierdzenie 2.2.3. *Każda przemienna półgrupa jest lewostronnie odwracalna.*

Dowód. Dla dowolnych $s, t \in S$ mamy $st \in sS$ oraz $st = ts \in tS$, tak więc przecięcie $\overline{sS} \cap \overline{tS}$ nie może być puste. □

Łatwo także stwierdzić, że lewostronna odwracalność nie jest równoważna przemienności.

Przykład 2.2.4. *Zdefiniujmy dwuelementową półgrupę $S = \{a, b\}$ za pomocą następującej tabelki mnożenia:*

$\cdot$	a	b
a	a	b
b	a	b

Widzimy, że jest to półgrupa nieprzemienna. Ponadto:

$$\overline{aS} = aS = \{a^2, ab\} = \{a, b\},$$

$$\overline{bS} = bS = \{ba, b^2\} = \{a, b\}.$$

Mamy zatem do czynienia z półgrupą lewostronnie odwracalną.

Definicja 2.2.5 (Reprezentacja półgrupy)**.** *Niech dana będzie półgrupa S oraz przestrzeń topologiczna (C, τ). Wtedy reprezentacją S na C nazwiemy przekształcenie $\mathcal{T} : S \times C \to C$, które (dla dowolnych s, $t \in S$, $x \in C$) jest zgodne z działaniem półgrupy:*

$$\mathcal{T}(st, x) = \mathcal{T}(s, \mathcal{T}(t, x)).$$

Reprezentację nazywamy ciągłą, jeśli przekształcenie $\mathcal{T}$ jest ciągłe (w topologii produktowej $S \times C$).

W praktyce – upraszczając zapis – reprezentacją nazywać będziemy taką indeksowaną rodzinę $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$, że przekształcenie $\mathcal{T}(s, x) = T_s x$ jest reprezentacją w sensie zdefiniowanym powyżej. Wtedy warunek zgodności z działaniem półgrupy ma postać

$$T_s T_t = T_{st}.$$

Mamy następujące (zob. [LaZh][Lemat 3.4])

Twierdzenie 2.2.6. *Ciągłe reprezentacje półgrup lewostronnie odwracalnych mają własność* $(\mathcal{SC})$.

2.3 Lewostronnie niezmiennicza średnia

Dla danej półgrupy semitopologicznej S, przez $C_b(S)$ oznaczać będziemy zbiór wszystkich rzeczywistych funkcji na S, które są ciągłe i ograniczone. Ponadto $C_b(S)$ będziemy traktować jako przestrzeń z normą supremum. Jest to oczywiście przestrzeń Banacha. Dla ustalonego $s \in \mathcal{S}$ wprowadźmy na $C_b(S)$ operator lewego przesunięcia l_s:

$$l_s f = t \mapsto f(st).$$

Semi-topologiczność półgrupy S gwarantuje nam, że jest to operator poprawnie zdefiniowany (to znaczy $l_s f \in C_b(S)$).

Definicja 2.3.1 (Lewostronna jednostajna ciągłość)**.** *Funkcję* $f \in C_b(S)$ *nazywamy lewostronnie jednostajnie ciągłą (Left Uniformly Continuous – LUC), jeśli przekształcenie*

$$S \ni s \mapsto l_s f \in C_b(S)$$

jest ciągłe. Zbiór wszystkich funkcji LUC względem półgrupy S *oznaczać będziemy przez* $LUC(S)$.

Okazuje się, że dla tych półgrup, które są reprezentowalne w sposób ciągły na zbiorach zwartych, wskazać można naturalną rodzinę funkcji lewostronnie

jednostajnie ciągłych. Przez $C(K)$ będziemy oznaczać zbiór funkcji rzeczywistych ciągłych na K.

Lemat 2.3.2. *Niech dana będzie rodzina przekształceń $\mathcal{S} = \{T_s : s \in S\}$ będąca ciągłą reprezentacją półgrupy S na zwartym zbiorze K. Wtedy przy dowolnym $f \in C(K)$ oraz $x \in K$, funkcja $f_x : S \to \mathbb{R}$ zdefiniowana jako*

$$f_x(s) = f(T_s x)$$

należy do $LUC(S)$.

Dowód. [1] Przekształcenie $f_x(\cdot) = (f \circ \mathcal{T})(\cdot, x)$ jest ciągłe jako złożenie przekształceń ciągłych (czyli $f_x \in C_b(S)$). Żeby udowodnić, że $f_x \in LUC(S)$ musimy wykazać, że także przekształcenie

$$S \ni r \mapsto l_r f_x \in C_b(S)$$

jest ciągłe, to jest dla każdego $r \in S$ i $\epsilon > 0$ znaleźć można otoczenie U punktu r, takie że

$$\|l_r f_x - l_t f_x\| < \epsilon,\ t \in U.$$

Najpierw zauważmy, że zachodzi

$$\|l_r f_x - l_t f_x\| = \sup_{s \in S} |f(T_r T_s x) - f(T_t T_s x)| \leq \sup_{y \in O} |f(T_r y) - f(T_t y)|\,, \tag{2.1}$$

gdzie $O \subset K$ oznacza domknięcie zbioru $\{T_s x \in K : s \in S\}$. Dalej ustalmy $\epsilon > 0$ i $r \in S$. Weźmy także ϵ_1 spełniające $0 < \epsilon_1 < \epsilon$. Z faktu, że reprezentacja $\mathcal{S}$ jest ciągła, wynika, że dla dowolnego $y \in K$ znaleźć można otoczenie $\mathcal{O}_y$ punktu $(r, y) \in S \times K$ takie, że

$$\forall_{(t,z) \in \mathcal{O}_y} |f(T_r y) - f(T_t z)| < \epsilon_1.$$

Wykorzystując definicję topologii produktowej możemy przyjąć w szczególności

$$\mathcal{O}_y = U_y \times V_y,$$

[1] Ta wersja dowodu - zasugerowana przez prof. dr. hab. Adama Bobrowskiego z Politechniki Lubelskiej - jest krótsza od wersji pierwotnie przedstawionej przez autora.

gdzie U_y jest otoczeniem punktu $r \in S$, a V_y otoczeniem punktu $y \in K$. Zauważmy, że $r \in \bigcap_{y \in O} U_y$, jednakże nie jest to dobry kandydat na U, ponieważ przecięcie dowolnej ilości otoczeń nie musi być otoczeniem. Niemniej jednak rodzina $(V_y)_{y \in O}$ pokrywa zwarty zbiór O. Istnieje zatem skończone podpokrycie

$$V_{y_1}, \ldots, V_{y_n} \subset (V_y)_{y \in O}$$

zbioru O. Przecięcie $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ jest już otoczeniem punktu r. Weźmy teraz dowolne $t \in U$. Zauważmy, że dla każdego $y \in O$ istnieje taki indeks i, że $(r, y) \in U_{y_i} \times V_{y_i}$. Stąd wynika też $(t, y) \in U_{y_i} \times V_{y_i}$. Dochodzimy do wniosku, że dla ustalonego ϵ_1 i dowolnego $y \in O$ istnieje takie otoczenie V punktu r, że dla dowolnego $t \in V$

$$|f(T_r y) - f(T_t y)| < \epsilon_1.$$

W szczególności po wzięciu supremum po y otrzymujemy

$$\sup_{y \in O} |f(T_r y) - f(T_t y)| \leq \epsilon_1 < \epsilon,$$

skąd - po wykorzystaniu równania (2.1) - wynika teza twierdzenia. □

Definicja 2.3.3 (Średnia lewostronnie niezmiennicza)**.** *Niech przestrzeń liniowa $A \subset C_b(S)$ zawiera $\mathbb{1}$, funkcję tożsamościowo równą 1. Wtedy funkcjonał liniowy $m \in A^*$ nazwiemy średnią (Mean) na A, jeśli*

$$\|m\| = m(\mathbb{1}) = 1.$$

Średnią m nazwiemy lewostronnie niezmienniczą, jeśli dla każdego $s \in \mathcal{S}$ zbiór A jest niezmienniczy dla l_s (to jest $l_s(A) \subset A$) oraz średnia jest lewostronnie niezmiennicza:

$$m(l_s f) = m(f).$$

Lemat 2.3.4. *Średnia m na A jest funkcjonałem dodatnim, to znaczy dla każdego $f \in A$,*

$$\forall_{s \in S} f(s) \geq 0 \implies m(f) \geq 0.$$

Dowód. Przyjmijmy $g = \frac{2}{\|f\|} f - \mathbb{1}$. Wtedy

$$m(f) = \frac{\|f\|}{2} m(g + \mathbb{1}) = \frac{\|f\|}{2}(m(g) + m(\mathbb{1})) = \frac{\|f\|}{2}(m(g) + 1).$$

Mamy oczywiście

$$|m(g)| \leq \|m\| \cdot \|g\| = 1 \cdot \|g\| = \left\| \frac{2}{\|f\|} f - \mathbb{1} \right\| = \sup_{s \in S} \left| \frac{2f(s)}{\|f\|} - 1 \right| \leq 1.$$

Tak więc w szczególności $m(g) \geq -1$. Dlatego

$$m(f) \geq \frac{\|f\|}{2}(-1 + 1) \geq 0.$$

□

Definicja 2.3.5 (Półgrupa dopuszczająca lewostronnie niezmienniczą średnią)**.** *Mówimy, że półgrupa semi-topologiczna S dopuszcza lewostronnie niezmienniczą średnią, jeśli istnieje średnia m na $LUC(S)$, która jest lewostronnie niezmiennicza.*

Więcej informacji na temat półgrup dopuszczających (lewostronnie) niezmienniczą średnią można znaleźć przykładowo w [Da2] oraz [Da3]. W ostatniej pracy można także znaleźć dowód twierdzenia, że półgrupy przemienne dopuszczają średnią. Natomiast w pracy [LaZh] wspomniany jest następujący fakt:

Twierdzenie 2.3.6. *Dyskretna półgrupa, która dopuszcza lewostronnie niezmienniczą średnią jest także półgrupą lewostronnie odwracalną.*

Jeśli opuścimy założenie, że topologia w półgrupie jest dyskretna, to powyższe twierdzenie przestanie być prawdziwe (zob. [LaZh]).

Lematy związane z teorią miary

Żeby pokazać, że półgrupy dopuszczające lewostronnie niezmienniczą średnią posiadają własność $(\mathcal{SC})$ wykorzystamy kilka twierdzeń i pojęć z teorii miary. Wszelkie fakty i definicje konieczne do zrozumienia poniższych lematów można znaleźć w [Du].

Lemat 2.3.7. *Niech μ będzie borelowską miarą prawdopodobieństwa określoną na przestrzeni zwartej. Wtedy dowolna niepusta rodzina domkniętych zbiorów o mierze 1 w tej przestrzeni posiada niepuste przecięcie.*

Dowód. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną wspomnianą w lemacie. Rodzina ta posiada własność skończonych przekrojów. Rzeczywiście, dla $A \in \mathcal{A}$ zachodzi $\mu(A^c) = 0$. Wtedy dla dowolnej skończonej rodziny $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$

$$0 = \sum_{A \in \mathcal{B}} \mu(A^c) = \mu(\bigcup_{A \in \mathcal{B}} A^c) = \mu([\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A]^c).$$

Stąd

$$\mu(\bigcap_{A \in \mathcal{B}} A) = 1.$$

Ponieważ przestrzeń jest zwarta, to przecięcie całej rodziny $\mathcal{A}$ jest także niepuste. □

W dowodzie twierdzenia 2.3.10 kluczowa okaże się własność reprezentacji funkcjonału przez miarę.

Lemat 2.3.8. *Niech K będzie przestrzenią zwartą (Hausdorffa) z wewnętrznie regularną miarą μ. Dalej, niech ϕ będzie funkcjonałem określonym na $C(K)$. Ponadto niech μ reprezentuje funkcjonał ϕ, to znaczy*

$$\phi(f) = \int_K f d\mu, \; f \in C(K).$$

Jeśli dla ciągłego przekształcenia $T : K \to K$ mamy $\phi(fT) = \phi(f)$, to miara μ jest niezmiennicza względem T, tzn. dla każdego zbioru borelowskiego $B \subset K$ zachodzi

$$\mu(B) = \mu(T^{-1}B).$$

Dowód. Z założeń wynika, że T jest mierzalne (ponieważ jest to przekształcenie ciągłe zwartego zbioru Hausdorffa). Skoro miara μ jest wewnętrznie regularna, możemy przybliżać $\mu(B)$ od dołu za pomocą zbiorów zwartych, co w naszym przypadku oznacza zbiory domknięte:

$$\mu(B) = \sup\{\mu(A) : A \subset B \text{ domknięte}\}.$$

Dlatego podobnie

$$\begin{aligned}\mu(T^{-1}B) &= \sup\{\mu(A) : A \subset T^{-1}B \text{ domknięte}\}\\ &= \sup\{\mu(A) : TA \subset B \wedge A \text{ domknięte}\}\\ &= \sup\{\mu(T^{-1}A) : A \subset B \text{ domknięte}\}.\end{aligned}$$

Stąd widzimy, że wystarczy pokazać, że

$$\mu(A) = \mu(T^{-1}A),\ A \subset K \text{ domknięte}.$$

Wybierzmy więc zbiór domknięty A. Wtedy A' jest zbiorem otwartym (czyli borelowskim) i ponownie

$$\mu(A') = \sup\{\mu(C) : C \subset A' \text{ domknięte}\}.$$

Dlatego możemy wybrać taki ciąg (C_n) domkniętych podzbiorów zbioru A', że

$$\lim_n \mu(C_n) = \mu(A').$$

Ponadto możemy założyć, że ciąg (C_n) jest wstępujący. Przestrzeń K jako zwarta przestrzeń Hausdorffa jest normalna, więc z lematu Urysohna wynika, że dla każdego C_n otrzymujemy ciągłą funkcję $f_n : K \to \langle 0, 1\rangle$ spełniającą warunki:

$$f_n(A) = \{1\},$$

$$f_n(C_n) = \{0\}.$$

Skoro $f_n \in C(K)$, to z faktu, że μ reprezentuje funkcjonał ϕ otrzymujemy

$$\int_K f_n d\mu = \phi(f_n) = \phi(f_n T) = \int_K f_n T d\mu.$$

Ponieważ operacja brania skończonego minimum zachowuje ciągłość, to przyjmując $f_n := \min_{1\le k\le n} f_k$ widzimy, że możemy dodatkowo założyć o ciągu (f_n), że jest monotoniczny. Stąd istnieje granica $f = \lim_n f_n$ (która jest funkcją mierzalną). Pokażemy, że f jest prawie wszędzie równa funkcji

charakterystycznej χ_A zbioru A. Zauważmy najpierw, że dla dowolnego n mamy $f(C_n) = 0$, gdyż ciąg (C_n) jest wstępujący. Ponadto

$$\begin{aligned}
G =& \{x \in K : f(x) \neq \chi_A(x)\} \\
=& \{x \in A : f(x) \neq \chi_A(x)\} \cup \{x \in A' : f \neq \chi_A(x)\} \\
=& \{x \in A' : f(x) \neq \chi_A(x)\} = \{x \in A' : f(x) \neq 0\} \\
=& \{x \in A' \setminus C_n : f(x) \neq 0\} \cup \{x \in C_n : f(x) \neq 0\} \\
=& \{x \in A' \setminus C_n : f(x) \neq 0\} \subset A' \setminus C_n.
\end{aligned}$$

Stąd

$$\mu(G) \leq \mu(A' \setminus C_n) = \mu(A') - \mu(C_n),$$

co po przejściu do granicy daje nam $\mu(G) = 0$. Tak więc f i χ_A są sobie równe poza zbiorem miary 0.

Wykorzystując powyższe wnioski oraz twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności ograniczonej mamy

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \int_K \chi_A d\mu = \int_K f d\mu = \int_K \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_K f_n d\mu \\
&= \lim_n \int_K f_n T d\mu = \int_K \lim_n f_n T d\mu = \int_K f T d\mu = \int_K \chi_A T d\mu.
\end{aligned}$$

Ponieważ T jest mierzalne, to w ostatniej całce możemy dokonać zamiany zmiennych:

$$\mu(A) = \int_K \chi_A d(T\mu) = (T\mu)(A) = \mu(T^{-1}A).$$

Ostatnia równość wynika wprost z definicji miary obrazowej (czyli miary $T\mu$).

□

Twierdzenie Riesza-Markowa daje nam warunki wystarczające do istnienia reprezentacji:

Lemat 2.3.9. *Niech K będzie zwartym zbiorem a $\phi : C(K) \to \mathbb{R}$ dodatnim funkcjonałem liniowym. Wtedy istnieje jedyna taka miara Radona μ na K, że*

$$\phi(f) = \int_K f d\mu, \ f \in C(K).$$

Miara Radona jest miarą wewnętrznie reprezentowalną; pozwoli nam to wykorzystać oba powyższe lematy wspólnie.

Twierdzenie 2.3.10. *Ciągła reprezentacja półgrupy dopuszczającej lewostronnie niezmienniczą średnią ma własność* $(\mathcal{SC})$.

Dowód. Niech dana będzie rodzina $\mathcal{S}$ przekształceń zwartego zbioru C będąca ciągłą reprezentacją półgrupy S dopuszczającej lewostronnie niezmienniczą średnią. Z ciągłości reprezentacji i z faktu, że C jest zwartą przestrzenią (Hausdorffa) na podstawie lematu 1.3.3 wnioskujemy, że dowolne przekształcenie $T_s \in \mathcal{S}$ jest domknięte.

Podobnie jak w dowodzie lematu 2.1.1 otrzymujemy minimalny zwarty zbiór $K \subset C$, który jest niezmienniczy dla $\mathcal{S}$. Pokażemy, że $\mathcal{S}$ zawężone do zbioru K jest rodziną suriektywną. Niech m będzie średnią lewostronnie niezmienniczą określoną na przestrzeni $LUC(S)$. Przy ustalonym $x \in K$ zdefiniujmy funkcjonał $\phi : C(K) \to \mathbb{R}$ jako

$$\phi(f) = m(f_x).$$

Łatwo zauważyć, że ϕ jest funkcjonałem ciągłym oraz liniowym. Z lematu 2.3.4 wnioskujemy, że ponadto jest on funkcjonałem dodatnim. W związku z tym, z twierdzenia Riesza-Markowa otrzymujemy miarę μ odpowiadającą temu funkcjonałowi. Okazuje się, że jest to miara prawdopodobieństwa:

$$\mu(K) = \int_K \mathbb{1} d\mu = \phi(\mathbb{1}) = m(\mathbb{1}_x) = m(\mathbb{1}) = 1.$$

Zauważmy, że dla $s, r \in S$ zachodzi

$$(fT_s)_x(r) = (fT_sT_r)(x) = (fT_{sr})(x) = f_x(sr) = (l_s f_x)(r).$$

Stąd używając lewostronnej niezmienniczości otrzymujemy

$$\phi(fT_s) = m((fT_s)_x) = m(l_s f_x) = m(f_x) = \phi(f).$$

Tak więc z lematu 2.3.8 wynika, że miara μ jest niezmiennicza względem T_s.

Dalej, niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną domkniętych podzbiorów $A \subset K$, dla których $\mu(A) = 1$. Rodzina jest niepusta, ponieważ należy do niej K. Z lematu 2.3.7 wiemy, że niepuste jest także przecięcie $\mathcal{A}$, które oznaczymy przez K_0.

Z faktu, że T_s jest przekształceniem domkniętym wnosimy, że zbiór $K_1 = T_s K \subset K$ jest domknięty. Dlatego powołując się na niezmienniczość μ względem T_s mamy

$$\mu(K_1) = \mu(T_s^{-1} K_1) = \mu(T_s^{-1} T_s K) = \mu(K) = 1.$$

i wnosimy stąd, że K_1 należy do $\mathcal{A}$. Dlatego

$$K_0 \subset K_1.$$

Mamy również $K_0 = K$. Rzeczywiście, z ciągłości reprezentacji zbiór $T_s^{-1} A$ jest domknięty dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$. Z pokazanej wyżej niezmienniczości miary μ względem T_s mamy

$$\mu(T_s^{-1} A) = \mu(T_s A) = 1.$$

Czyli $T_s^{-1} A \in \mathcal{A}$, a stąd wynika, że $K_0 \subset T_s^{-1} A$, co daje w efekcie

$$K_0 \subset \bigcap_{A \in \mathcal{A}} T_s^{-1} A = T_s^{-1} \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = T_s^{-1} K_0,$$

czyli

$$T_s K_0 \subset K_0.$$

Z minimalności K wnioskujemy, że $K = K_0$ i ostatecznie otrzymujemy

$$K_0 \subset K_1 \subset K = K_0.$$

Stąd $K = K_1 = T_s K$ i z dowolności wyboru s wynika suriektywność rodziny $\mathcal{S}$ na zbiorze K. □

Powyższe twierdzenie (wraz z lematem 2.3.2) pochodzi od Lau (zob. [LaTa], lemat 5.1).

Rozdział 3

Asymptotyczna regularność

3.1 Pojęcia wstępne

Definicja 3.1.1. *O nieujemnej funkcji rzeczywistej $f : X^2 \to \mathbb{R}$ powiemy, że rozróżnia punkty (na zbiorze X), jeśli*

$$\forall_{x,\, y \in X} f(x, y) = 0 \implies x = y.$$

Rozważanymi w matematyce niemetrycznymi przykładami funkcji rozróżniających punkty są metryki częściowe (zobacz [SaVe], [BuKo]) oraz pewne inne możliwe uogólnienia metryk, ale nie pseudometryki.

Lemat 3.1.2. *Niech dana będzie suriekcja $T : X \to X$ określona na podzbiorze przestrzeni topologicznej. Jeśli istnieje taka funkcja f rozróżniająca punkty na X, że*

$$\sup_{x \in X} f(T^{n+1}x, T^n x) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{3.1}$$

to T jest funkcją tożsamościową.

Dowód. Ustalmy $y \in X$ oraz $\epsilon > 0$. Z założeń lematu wynika, że wskazać można naturalną liczbę n, taką że

$$\forall_{x \in X} \text{-}\epsilon < f(T^{n+1}x, T^n x) < \epsilon.$$

Z suriektywności T wynika, że istnieje takie $x \in X$, że $T^n x = y$. Stąd mamy

$$-\epsilon < f(Ty, y) < \epsilon.$$

Z dowolności ϵ wynika $f(Ty, y) = 0$, a co za tym idzie $Ty = y$. Natomiast dowolność y pociąga za sobą $T = \mathbb{I}$. □

Warunek 3.1 przypomina znaną z przestrzeni Banacha jednostajną asymptotyczną regularność. Zachęceni otrzymanym wynikiem spróbujmy dokonać uogólnienia:

Definicja 3.1.3 (Asymptotyczna regularność)**.** *Niech f będzie funkcją rozróżniającą punkty na przestrzeni X. Powiemy wtedy, że przekształcenie $T : X \to X$ jest:*

- *(punktowo) f-asymptotycznie regularne w punkcie $x \in X$, jeśli*

$$f(T^{n+1}x, T^n x) \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

- *f-asymptotycznie regularne, jeśli jest f-asymptotycznie regularne dla każdego $x \in X$,*

- *jednostajnie f-asymptotycznie regularne, jeśli spełnia warunek (3.1).*

Ponadto, jeśli $\mathcal{S}$ jest rodziną przekształceń zbioru X, to powiemy że $\mathcal{S}$ jest uniwersalnie jednostajnie f-asymptotycznie regularna, jeśli

$$\sup_{T\in\mathcal{S}} \sup_{x\in X} f(T^{n+1}x - T^n x) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Zauważmy, że przyjmując w przestrzeni Banacha

$$f(x, y) = \|x - y\|$$

nasze definicje pokrywają się z klasycznymi definicjami asymptotycznej regularności.

Kilkakrotnie będziemy się powoływać na następujący lemat:

Lemat 3.1.4. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną przekształceń zbioru C, $T \in \mathcal{S}$, $x \in C$. Wtedy rodzina $\mathcal{S}$ jest uniwersalnie jednostajnie f-asymptotycznie regularna $\Longrightarrow$ T jest jednostajnie f-asymptotycznie regularne $\Longrightarrow$ T jest f-asymptotycznie regularne $\Longrightarrow$ T jest f-asymptotycznie regularne w punkcie x.*

Twierdzenie 3.1.5. *Jeśli przy ciągłej funkcji f rodzina $\mathcal{S} \subset C^C$ jest uniwersalnie jednostajnie f-asymptotycznie regularna, to $\overline{\mathcal{S}}$ - domknięcie $\mathcal{S}$ w topologii produktowej - jest także uniwersalnie jednostajnie f-asymptotycznie regularne.*

Dowód. Z założeń, przy ustalonym $\epsilon > 0$ możemy wybrać ϵ_0 i n_0 takie, że

$$\forall_{n>n_0}\forall_{T\in\mathcal{S}}\forall_{x\in C} f(T^{n+1}x, T^n x) < \epsilon_0 < \epsilon.$$

Niech ciąg uogólniony $(T_\alpha) \subset \mathcal{S}$ ma granicę T. Stąd w szczególności

$$\forall_{n>n_0}\forall_{\alpha}\forall_{x\in C} f(T_\alpha^{n+1}x, T_\alpha^n x) < \epsilon_0.$$

Po przejściu do granicy otrzymujemy

$$\forall_{n>n_0}\forall_{x\in C} f(T^{n+1}x, T^n x) \leq \epsilon_0 < \epsilon.$$

Tak więc przy dowolnym $\epsilon > 0$ mamy n_0 takie, że

$$\forall_{n>n_0}\forall_{T\in\overline{\mathcal{S}}}\forall_{x\in C} f(T^{n+1}x, T^n x) < \epsilon,$$

co kończy dowód. □

Lemat 3.1.6. *Niech X będzie domkniętym podzbiorem przestrzeni topologicznej oraz $T : X \to X$ ciągłym przekształceniem, które jest f-asymptotycznie regularne w punkcie $x \in X$. Niech ponadto O oznacza orbitę punktu x przy przekształceniu T. Załóżmy, że f jest ciągłe. Wtedy dowolny punkt skupienia zbioru O jest punktem stałym przekształcenia T.*

Dowód. Niech y będzie punktem skupienia orbity $O = \{T^n x | n \in \mathbb{N}\}$. Możemy wyciągnąć więc ciąg uogólniony $\{T^{n_\alpha} x\} \subset O$ zbieżny do y. Ponieważ f i T są ciągłe, to

$$f(Ty, y) = f(\lim_\alpha T^{n_\alpha+1}x, \lim_\alpha T^{n_\alpha}x) = \lim_\alpha f(T^{n_\alpha+1}x, T^{n_\alpha}x) = 0.$$

Stąd na mocy rozróżniania punktów przez f mamy $Ty = y$. $\square$

Tak więc jeśli f-asymptotycznie regularne ciągłe przekształcenie nie posiada punktów stałych, to żadna z jego orbit nie posiada punktów skupienia (przy założeniu, że f jest ciągłe).

Na koniec zauważmy, że w ogólnym przypadku nie można pozbyć się założenia jednostajności z twierdzenia 3.1.2: przekształcenie $Tx = x^2$ na przedziale $\langle 0, 1 \rangle$ jest $|\cdot|$-asymptotycznie regularną suriekcją i w oczywisty sposób nie jest identycznością.

3.2 Jednostajna asymptotyczna regularność

Zaprezentujemy kilka przykładów przekształceń w przestrzeniach Banacha związanych z asymptotyczną regularnością.

Definicja 3.2.1 (Przekształcenie regularnie nieoddalające)**.** *Przekształcenie $T : C \to C$ określone na podzbiorze przestrzeni Banacha nazywamy regularnie nieoddalającym, jeśli*

$$\|Tx - Ty\| \leq \|\alpha(x - y) + \overline{\alpha}(Tx - Ty)\|,$$

gdzie $\overline{\alpha} = 1 - \alpha$ i nierówność zachodzi dla każdego $\alpha \in (0, 1)$ oraz $x, y \in C$.

Jeśli chodzi o tę klasę przekształceń, znany jest następujący wniosek z twierdzenia udowodnionego przez Reicha i Shafrira [ReSh]:

Twierdzenie 3.2.2. *Regularnie nieoddalające przekształcenie ograniczonego zbioru jest asymptotycznie regularne.*

Definicja 3.2.3 (Przekształcenie uśrednione)**.** *Niech $\alpha \in (0, 1)$ oraz C będzie zbiorem wypukłym. Powiemy, że przekształcenie $T : C \to C$ jest α-uśrednione nieoddalające (averaged nonexpansive), jeśli istnieje takie nieoddalające przekształcenie $S : C \to C$, że*

$$T = \alpha I + \overline{\alpha} S.$$

Analogicznie definiujemy przekształcenie α-uśrednione afiniczne.

Dla przekształceń uśrednionych nieoddalających mamy fakt udowodniony przez Edelsteina i O'Briena [EdOb].

Twierdzenie 3.2.4. *Uśrednione nieoddalające przekształcenie ograniczonego (i wypukłego) podzbioru przestrzeni Banacha jest jednostajnie asymptotycznie regularne.*

3.2.1 Przekształcenia afiniczne

W najbliższych wyprowadzeniach przyjmujemy

$$\binom{n}{n+1} = \binom{n}{-1} = 0.$$

Definicja 3.2.5. *Mówimy, że funkcja rzeczywista f jest dokładnie rzędu funkcji rzeczywistej g, jeśli istnieją dodatnie stałe n_0, c_1, c_2, takie że*

$$\forall_{n>n_0} c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n).$$

Piszemy wtedy $f(n) = \Theta(g(n))$. Jeśli zachodzi tylko druga nierówność (czyli $f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$), to piszemy $f(n) = O(g(n))$ Jeśli $\lim_n \frac{f(n)}{g(n)} = 1$, to mówimy, że funkcje są asymptotycznie równoważne. Zapisujemy wtedy $f(n) \approx g(n)$.

W szczególności istotne będą dla nas trzy własności:

Lemat 3.2.6. *Zachodzi:*

- $f(n) \approx g(n) \wedge g(n) = \Theta(h(n)) \implies f(n) = \Theta(h(n))$,
- $f(n) \leq g(n) \wedge g(n) = O(h(n)) \implies f(n) = O(h(n))$,
- $f(n) \approx f_1(n) \wedge g(n) \approx g_1(n) \implies \frac{f(n)}{g(n)} \approx \frac{f_1(n)}{g_1(n)}$.

Lemat 3.2.7. *Przyjmijmy $m = \lfloor \overline{\alpha}(n+1) \rfloor$. Ciąg*

$$r_k = r_k(n) = \binom{n}{k} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k.$$

jest niemalejący dla $k \in \{-1 \ldots m\}$ oraz nierosnący dla $k \in \{m \ldots n+1\}$. Ponadto $r_m = \Theta\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)$.

Dowód. Rozwiązując nierówność $r_k \geq r_{k-1}$ otrzymujemy

$$(n-k+1)\overline{\alpha} \geq k\alpha \iff k \leq (n-\alpha n) + (1-\alpha) = \overline{\alpha}n + \overline{\alpha} = \overline{\alpha}(n+1).$$

Oszacujemy teraz asymptotyczne tempo wzrostu elementu r_m. Wykorzystamy do tego przybliżenie Stirlinga

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Stąd

$$\binom{n}{m} \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\left(\frac{n}{n-m}\right)^n \left(\frac{n-m}{m}\right)^m.$$

Dlatego mamy

$$r_m \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\left(\frac{n}{n-m}\right)^n \left(\frac{n-m}{m}\right)^m \alpha^{(n-m)}\overline{\alpha}^m.$$

Zauważmy, że dla pewnego $\epsilon_n \in \langle 0, 1)$

$$m = \overline{\alpha}(n+1) - \epsilon_n = \overline{\alpha}n + \delta_n,$$

gdzie $\delta_n \in (-1, 1)$ jest odpowiednio dobrane. Mamy teraz

$$\begin{aligned}\left(\frac{n}{n-m}\right)^n &= \left(\frac{n}{\alpha n - \delta_n}\right)^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \left(\frac{n}{n - \frac{\delta_n}{\alpha}}\right)^n \\ &= \alpha^{-n}\left(\left(1 + \frac{-\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}.\end{aligned}$$

Podobnie

$$\left(\frac{n-m}{m}\right)^m = \frac{\alpha^m\left(1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}\right)^m}{\overline{\alpha}^m\left(1+\frac{\delta_n}{\alpha n}\right)^m} = \frac{\alpha^m}{\overline{\alpha}^m}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}}{\left(1+\frac{\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}}\right)^{\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}}\cdot\left(\frac{1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}}{1+\frac{\delta_n}{\alpha n}}\right)^{\delta_n}.$$

Stąd po podstawieniu i skróceniu otrzymujemy

$$r_m \approx \sqrt{\frac{n}{2\pi m(n-m)}}\cdot\left(\left(1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}}{\left(1+\frac{\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}}\right)^{\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}}\cdot\left(\frac{1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}}{1+\frac{\delta_n}{\alpha n}}\right)^{\delta_n}.$$

Przyjmijmy $t(n) = C_n \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}$, gdzie

$$C_n = \sqrt{\frac{n}{2\pi m(1-\frac{m}{n})}} \cdot \left(\left(1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \cdot \left(\frac{\left(1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}}{\left(1+\frac{\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n}}\right)^{\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}} \cdot \left(\frac{1+\frac{-\delta_n}{\alpha n}}{1+\frac{\delta_n}{\alpha n}}\right)^{\delta_n}.$$

Zauważmy, że przyjmując

$$n_0 = \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\overline{\alpha}}\right)$$

mamy

$$\alpha + \frac{\pm\delta_n}{n} > 0,\ n > n_0,$$
$$\overline{\alpha} + \frac{\pm\delta_n}{n} > 0,\ n > n_0.$$

Wtedy

$$\frac{n}{m(1-\frac{m}{n})} = \frac{1}{\left(\overline{\alpha}+\frac{\delta_n}{n}\right)\left(\alpha-\frac{\delta_n}{n}\right)} > 0,\ n > n_0.$$

Co więcej,

$$1 + \frac{\pm\delta_n}{\alpha n} > 0,\ n > n_0.$$

Widzimy stąd, że każdy czynnik iloczynu występujący we wzorze na C_n ma dodatnie infimum (gdy $n > n_0$). Ponieważ infimum iloczynu jest nie mniejsze od iloczynu infimów, mamy

$$c_1 = \inf_{n>n_0} C_n > 0.$$

Ponadto każdy z czynników iloczynu jest ograniczony, albo dlatego, że posiada granicę, albo dlatego, że można go ograniczyć z góry przez ciąg posiadający granicę, co wynika z poniższych nierówności:

$$\left(1+\frac{\pm\delta_n}{\alpha n}\right)^{\alpha n} < \left(1+\frac{1}{\alpha n}\right)^{\alpha n} \xrightarrow{n\to\infty} e,$$
$$\left(1+\frac{\pm\delta_n}{\alpha n}\right)^{\delta_n} < 1+\frac{\pm\delta_n}{\alpha n} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

Dlatego mamy skończoną stałą

$$c_2 = \sup_{n>n_0} C_n.$$

Ponadto oczywiście $c_1 \leq C_n \leq c_2$. Pokazaliśmy więc istnienie miejsca n_0 i dwóch dodatnich stałych c_1, c_2, przy których dla każdego $n > n_0$ zachodzi

$$c_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{n}} \leq t(n) \leq c_2 \cdot \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

Tak więc wykazaliśmy, że $t(n)$ jest dokładnie rzędu $\Theta(\sqrt{\frac{1}{n}})$. Skoro $r_m \approx t(n)$, pociąga to także $r_m = \Theta(\sqrt{\frac{1}{n}})$. □

Lemat 3.2.8. *Przy afinicznym przekształceniu S przyjmijmy*

$$T = \alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}S.$$

Wtedy

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k.$$

Dowód. Dla $n = 1$, przyjmując $S^0 = \mathbb{I}$, widzimy że teza zachodzi. Załóżmy więc, że zachodzi

$$T^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-1-k)} \overline{\alpha}^k S^k.$$

Oczywiście zachodzi

$$T^n = T(T^{n-1}) = (\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}S)(T^{n-1}) = \alpha T^{n-1} + \overline{\alpha}S(T^{n-1}).$$

Stąd po wykorzystaniu założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$T^n = \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-1-k)} \overline{\alpha}^k S^k + \overline{\alpha}S \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-1-k)} \overline{\alpha}^k S^k = (*).$$

Zauważmy, że w drugim czynniku sumy możemy wejść z S pod znak sumy, gdyż mamy do czynienia z kombinacją afiniczną:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-1-k)} \overline{\alpha}^k = (\alpha + \overline{\alpha})^{n-1} = 1.$$

Otrzymujemy zatem

$$(*) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-1-k)} \overline{\alpha}^{(k+1)} S^{(k+1)} = (**).$$

Reszta przebiega jak klasyczny dowód na rozwinięcie dwumianu Newtona:

$$\begin{aligned}
(**) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1}{k-1} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{(n-k)} \overline{\alpha}^k S^k.
\end{aligned}$$

□

O przekształceniu $T : C \to C$ powiemy że posiada wspólnie ograniczone potęgi (ang. Power Bounded), jeśli istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \sup_{x\in C} \|T^n x\| < M.$$

Oczywiście, jeśli przekształcenie jest zdefiniowane na ograniczonym zbiorze, to posiada ono wspólnie ograniczone potęgi.

Twierdzenie 3.2.9. *Jeśli S jest afinicznym przekształceniem wypukłego podzbioru unormowanej przestrzeni liniowej posiadającym dodatkowo wspólnie ograniczone potęgi, to przekształcenie uśrednione $T = \alpha I + \overline{\alpha} S$ jest jednostajnie asymptotycznie regularne.*

Dowód. Mamy

$$T^{n+1} = TT^n = (\alpha I + \overline{\alpha} S)T^n = \alpha T^n + \overline{\alpha} S T^n.$$

Odejmując stronami otrzymujemy

$$T^n - T^{n+1} = \overline{\alpha} T^n - \overline{\alpha} S T^n = \overline{\alpha}(T^n - ST^n).$$

Przyjmując r_k tak jak w lemacie 3.2.7 zauważmy, że

$$ST^n = \sum_{k=0}^{n} r_k S^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} r_{k-1} S^k.$$

Stąd

$$T^n - ST^n = \sum_{k=0}^{n} r_k S^k - \sum_{k=0}^{n+1} r_{k-1} S^k = \sum_{k=0}^{n+1} s_k S^k,$$

gdzie $s_k = r_k - r_{k-1}$. Z lematu 3.2.7 wynika, że s_k jest nieujemne dla $k \in \{0, ..., m\}$. Wykorzystując relację $s_k + s_{k+1} = r_{k+1} - r_{k-1}$ widzimy, że suma zwija się teleskopowo:

$$\sum_{k=0}^{m} s_k = r_m.$$

Pozostałe składniki sumy są ujemne i podobnie

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} |s_k| = \left| \sum_{k=m+1}^{n+1} s_k \right| = |-r_m| = r_m.$$

Z wypukłości C wynika, że dla każdego $x \in C$,

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{s_k}{r_m} S^k x = x_1(x) \in C,$$

$$\sum_{k=m+1}^{n+1} \frac{|s_k|}{r_m} S^k x = x_2(x) \in C.$$

Natomiast ze wspólnego ograniczenia potęg przekształcenia S,

$$\sup_{x \in C} \|x_1(x)\| \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{|s_k|}{r_m} \cdot \sup_{x \in C} \left\|S^k x\right\| \leq M \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{|s_k|}{r_m} < \infty.$$

Analogicznie dla $\sup_{x \in C} \|x_2(x)\|$ i stąd

$$\sup_{x \in C} \|x_1(x) - x_2(x)\| \leq \sup_{x \in C} (\|x_1(x)\| + \|x_2(x)\|) = M \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \frac{|s_k|}{r_m} = 2M.$$

Zauważmy (wykorzystując ponownie lemat 3.2.7 oraz lemat 3.2.6)

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in C}\left\|T^n(x)-T^{n+1}(x)\right\| &= \left\|T^n-T^{n+1}\right\| \\
&= \overline{\alpha}\left\|T^n-ST^n\right\| = \overline{\alpha}\left\|\sum_{k=0}^{n+1} s_k S^k\right\| \\
&= \overline{\alpha} r_m \left\|\sum_{k=0}^{m}\frac{s_k}{r_m}S^k - \sum_{k=m+1}^{n+1}\frac{|s_k|}{r_m}S^k\right\| \\
&= \overline{\alpha}\cdot r_m \cdot \sup_{x\in C}\left\|x_1(x)-x_2(x)\right\| \\
&\leq \overline{\alpha}\cdot r_m\cdot 2M = O\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right)\xrightarrow{n} 0.
\end{aligned}$$

Tym sposobem rzeczywiście otrzymaliśmy jednostajną asymptotyczną regularność przekształcenia T. □

Zauważmy, że w dowodzie nie możemy notacji dużego O zastąpić notacją Θ, gdyż nie wskazaliśmy ograniczenia wyrażenia $\sup_{x\in C}\|x_1(x)-x_2(x)\|$ od dołu przez stałą. Niemniej jednak

Uwaga 3.2.10. *Ponieważ jak wiadomo każde liniowe przekształcenie jest afiniczne, twierdzenie 3.2.9 potwierdza hipotezę postawioną przez Xu i Yamadę w [XuYa][Remark 3] mówiącą, że*

$$\sup_{x\in C}\left\|T^{n+1}x-T^n x\right\| = O\left(\sqrt{\frac{1}{n}}\right).$$

Uwaga 3.2.11. *Twierdzenie nie jest prawdziwe bez założenia o wspólnym ograniczeniu potęg przekształcenia S. Rzeczywiście, dla afinicznego $S = k\cdot\mathbb{I}$ przy $k>1$ mamy*

$$T = \alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}S = (1+\overline{\alpha}k)\mathbb{I} = t\cdot\mathbb{I}.$$

Widzimy, że $t>1$. Dlatego

$$\sup_{x\in C}\left\|T^{n+1}x-T^n x\right\| = \sup_{x\in C}\left\|t^{n+1}x-t^n x\right\| = t^n\cdot\sup_{x\in C}\left\|\overline{t}\cdot x\right\| \xrightarrow{n}\infty.$$

3.3 Uniwersalnie jednostajna asymptotyczna regularność

Lemat 3.3.1. *Niech $\mathcal{S}$ będzie pewną rodziną przekształceń podzbioru C przestrzeni Banacha E. Dalej, dla danego $A \subset E$ niech $A^\star$ będzie rodziną wszystkich ograniczonych odwzorowań ze zbioru C w A:*

$$A^\star = \{T \in A^C : \|T\|_\star < \infty\},$$

gdzie $\|\cdot\|_\star$ jest standardową normą supremum[1]. Zdefiniujmy także rodzinę wszystkich ograniczonych odwzorowań z $\mathcal{S}$ w $A^\star$:

$$A^\bigstar = \{f \in (A^\star)^{\mathcal{S}} : \|f\|_\bigstar < \infty\},$$

gdzie

$$\|f\|_\bigstar = \sup_{T \in \mathcal{S}} \|f(T)\|_\star .$$

Wtedy:

- *$E^\bigstar$ jest przestrzenią Banacha (rozpatrujemy $E^\bigstar$ i $E^\star$ jako przestrzenie liniowe z dodawaniem funkcji i mnożeniem funkcji przez liczbę),*
- *$C^\bigstar \subset E^\bigstar$,*
- *jeśli C jest ograniczone, to także $C^\bigstar$ jest ograniczone,*
- *jeśli C jest wypukłe, to także $C^\bigstar$ jest wypukłe,*
- *jeśli C jest ograniczone, to odwzorowanie $i : \mathcal{S} \to C^\star$ dane wzorem*

  $$i(T) = \mathbb{I}_C,\ T \in \mathcal{S}$$

  jest poprawnie zdefiniowane i należy do $C^\bigstar$.

[1] Zwróćmy uwagę, że użyto tutaj symbolu *, a nie standardowego oznaczenia dla przestrzeni dualnych, to jest *.

Dowód. Zbiór $E^\bigstar$ jest przestrzenią Banacha, ponieważ $E^\star$ jest przestrzenią Banacha, ponieważ E jest przestrzenią Banacha. Także $C^\bigstar \subset E^\bigstar$, gdyż $C^\star \subset E^\star$, gdyż $C \subset E$. Z podobnego łańcucha zależności wynika, że $C^\bigstar$ dziedziczy ograniczoność po C:

$$\begin{aligned}\forall_{x\in C}\, \|x\| \leq M \implies & \forall_{T\in C^\star} \sup_{x\in C} \|Tx\| \leq M \implies \forall_{T\in C^\star} \|T\|_\star \leq M \\ \implies & \forall_{T\in \mathcal{S}} \|T\|_\star \leq M \implies \forall_{f\in C^\bigstar} \sup_{T\in C^\star} \|f(T)\|_\star \leq M \\ \implies & \forall_{f\in C^\bigstar} \|f\|_\bigstar \leq M.\end{aligned}$$

Jeśli C jest zbiorem wypukłym, to zbiór $C^\star$ jest zamknięty na kombinacje wypukłe, więc sam jest wypukły. Na tej samej zasadzie zbiór $C^\bigstar$ jest także wypukły.

Odwzorowanie i jest poprawnie zdefiniowane, gdyż $\mathbb{I}_C \in C^\star$:

$$\|\mathbb{I}_C\|_\star = \sup_{x\in C} \|\mathbb{I}_C(x)\| = \sup C < \infty.$$

Teraz $i \in C^\bigstar$, ponieważ

$$\|i\|_\bigstar = \sup_{T\in\mathcal{S}} \|i(T)\|_\star = \sup_{T\in\mathcal{S}} \|\mathbb{I}_C\|_\star = \|\mathbb{I}_C\|_\star < \infty.$$

□

Lemat 3.3.2. *Dla ograniczonego zbioru C operację $F : C^\bigstar \to C^\bigstar$ zdefiniujmy następująco: dla $f \in C^\bigstar$ wartość $F(f)$ będzie odwzorowaniem opisanym wzorem*

$$\mathcal{S} \ni T \mapsto T \circ f(T).$$

Wtedy dla i zdefiniowanego jak w poprzednim lemacie zachodzi

$$[F^n(i)](T) = T^n,\ T \in \mathcal{S}. \tag{3.2}$$

Ponadto, przy $\alpha \in (0,1)$ dla

$$F_\alpha = \alpha\mathbb{I}_{C^\bigstar} + \overline{\alpha}F,$$

$$T_\alpha = \alpha\mathbb{I}_C + \overline{\alpha}T$$

zachodzi

$$[F_\alpha^n(i)](T) = T_\alpha^n. \tag{3.3}$$

Dowód. Zauważmy, że wzór (3.2) zachodzi dla $n = 1$:

$$F(i)(T) = T \circ i(T) = T \circ \mathbb{I}_C = T.$$

Ponadto równość

$$[F^{n+1}(i)](T) = [F(F^n(i))](T) = T \circ ([F^n(i)](T)) = T^{n+1}$$

jest prawdziwa przy założeniu indukcyjnym $[F^n(i)](T) = T^n$. Dowodzi to prawdziwości pierwszej części lematu.

Jeśli chodzi o drugą część - to jest równanie (3.3) - jest ono prawdziwe dla $n = 1$:

$$F_\alpha(i)(T) = \alpha i(T) + \overline{\alpha} F(i)(T) = \alpha \mathbb{I}_C + \overline{\alpha} T = T_\alpha.$$

Załóżmy $[F_\alpha^n(i)](T) = T_\alpha^n$ i stąd

$$\begin{aligned}
[F_\alpha^{n+1}(i)](T) &= [F_\alpha F_\alpha^n(i)](T) = [(\alpha \mathbb{I}_{C^\star} + \overline{\alpha} F) F_\alpha^n(i)](T) \\
&= [\alpha \mathbb{I}_{C^\star} F_\alpha^n(i) + \overline{\alpha} F F_\alpha^n(i)](T) \\
&= \alpha [\mathbb{I}_{C^\star} F_\alpha^n(i)](T) + \overline{\alpha} [F F_\alpha^n(i)](T) \\
&= \alpha \mathbb{I}_{C^\star}([F_\alpha^n(i)](T)) + \overline{\alpha} T([F_\alpha^n(i)](T)) \\
&= \alpha \mathbb{I}_C T_\alpha^n + \overline{\alpha} T T_\alpha^n = (\alpha \mathbb{I}_C + \overline{\alpha} T) T_\alpha^n \\
&= T_\alpha T_\alpha^n = T_\alpha^{n+1},
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 3.3.3. *Rodzina $\mathcal{S}$ wszystkich regularnie nieoddalających przekształceń ograniczonego podzbioru C przestrzeni Banacha E jest uniwersalnie jednostajnie f-asymptotycznie regularna.*

Dowód. Niech operacja F oraz odwzorowanie i będą takie jak w lemacie 3.3.2. Łatwo stwierdzić, że regularne nieoddalanie przekształceń z $\mathcal{S}$ implikuje regularne nieoddalanie operacji F:

$$\|F(f) - F(g)\|_\star = \sup_{T \in \mathcal{S}} \|T \circ f(T) - T \circ g(T)\|_\star$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{T\in\mathcal{S}}\sup_{x\in C}\|T(f(T)(x)) - T(g(T)(x))\| \\
&\leq \sup_{T\in\mathcal{S}}\sup_{x\in C}\|\alpha\,[f(T)(x) - g(T)(x)] + \overline{\alpha}\,[T(f(T)(x)) - T(g(T)(x))]\| \\
&= \sup_{T\in\mathcal{S}}\|\alpha\,[f(T) - g(T)] + \overline{\alpha}\,[T\circ f(T) - T\circ g(T)]\|_{\star} \\
&= \|\alpha(f-g) + \overline{\alpha}(F(f) - F(g))\|_{\bigstar}.
\end{aligned}
$$

Z lematu 3.3.1 wynika, że $C^{\bigstar}$ jest ograniczonym podzbiorem przestrzeni Banacha. Możemy więc zastosować twierdzenie 3.2.2 - operacja F jest asymptotycznie regularna:

$$
\lim_n \left\|F^{n+1}(f) - F^n(f)\right\|_{\bigstar} = 0,\ f \in C^{\bigstar}.
$$

Wtedy w szczególności

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_n \left\|F^{n+1}(i) - F^n(i)\right\|_{\bigstar} \\
&= \lim_n \sup_{T\in\mathcal{S}} \left\|[F^{n+1}(i)](T) - [F^n(i)](T)\right\|_{\star} \\
&= \lim_n \sup_{T\in\mathcal{S}}\sup_{x\in C} \left\|T^{n+1}(x) - T^n(x)\right\|,
\end{aligned}
$$

co kończy dowód. □

Nadmienić należy, że idea powyższego dowodu pochodzi od Goebla i Kirka. Udowodnili oni w ten sposób następujący fakt:

Twierdzenie 3.3.4. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich nieoddalających przekształceń ograniczonego (i wypukłego) podzbioru C przestrzeni Banacha. Przy ustalonym $\alpha \in (0,1)$ i T_α zdefiniowanym jako $\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T$, rodzina*

$$
\mathcal{S}_\alpha = \{T_\alpha : T \in \mathcal{S}\}
$$

jest uniwersalnie jednostajnie f-asymptotycznie regularna.

Dowód. Dowód przebiega analogicznie, F oraz i bierzemy takie same jak w lemacie 3.3.2. Mając na uwadze, że $\mathcal{S}$ tym razem składa się z przekształceń nieoddalających stwierdzamy, że operacja F jest nieoddalająca:

$$
\begin{aligned}
\|F(f) - F(g)\|_{\bigstar} &= \sup_{T\in\mathcal{S}}\|T\circ f(T) - T\circ g(T)\|_{\star} \\
&\leq \sup_{T\in\mathcal{S}}\|f(T) - g(T)\|_{\star} = \|f-g\|_{\bigstar}.
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy operację

$$F_\alpha = \alpha \mathbb{I}_{C^\star} + \overline{\alpha} F.$$

Jest to przekształcenie uśrednione nieoddalające na zbiorze wypukłym i ograniczonym (lemat 3.3.1), więc możemy zastosować twierdzenie 3.2.4 (wraz z obserwacją 3.1.4) i otrzymać asymptotyczną regularność F_α. Używając teraz lematu 3.3.2, mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_n \left\| F_\alpha^{n+1}(i) - F_\alpha^n(i) \right\|_\bigstar \\ &= \lim_n \sup_{T\in\mathcal{S}} \left\| [F_\alpha^{n+1}(i)](T) - [F_\alpha^n(i)](T) \right\|_\star \\ &= \lim_n \sup_{T_\alpha\in\mathcal{S}_\alpha} \left\| T_\alpha^{n+1} - T_\alpha^n \right\|_\star \\ &= \lim_n \sup_{T_\alpha\in\mathcal{S}_\alpha} \sup_{x\in C} \left\| T_\alpha^{n+1}(x) - T_\alpha^n(x) \right\| . \end{aligned}$$

Czyli rodzina $\mathcal{S}_\alpha$ jest rzeczywiście uniwersalnie jednostajnie asymptotycznie regularna. □

Próba zastosowania podanego schematu dowodzenia do przekształceń afinicznych także okazuje się być owocna.

Twierdzenie 3.3.5. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich afinicznych przekształceń ograniczonego (i wypukłego) podzbioru C przestrzeni Banacha. Wtedy przy ustalonym $\alpha \in (0,1)$ rodzina*

$$\mathcal{S}_\alpha = \{T_\alpha : T \in \mathcal{S}\}$$

jest uniwersalnie jednostajnie asymptotycznie regularna.

Dowód. Definiujemy F i F_α jak wcześniej. Operacja F jest afiniczna:

$$\begin{aligned} F(\alpha f + \overline{\alpha} g)(T) &= T \circ [(\alpha f + \overline{\alpha} g)(T)] \\ &= T \circ [\alpha f(T) + \overline{\alpha} g(T)] \\ &= T \circ [\alpha f(T)] + T \circ [\overline{\alpha} g(T)] \\ &= \alpha [T \circ f(T)] + \overline{\alpha} [T \circ g(T)] \\ &= \alpha F(f)(T) + \overline{\alpha} F(g)(T) \\ &= [\alpha F(f)(T) + \overline{\alpha} F(g)](T). \end{aligned}$$

Zbiór $C^\bigstar$ spełnia założenia twierdzenia 3.2.9. Stąd operacja F_α jest asymptotycznie regularna i uzyskujemy dowód uniwersalnej jednostajnej asymptotycznej regularności w taki sam sposób jak poprzednio. □

Uwaga 3.3.6. *Niech Φ reprezentuje klasę[2] wszystkich przekształceń posiadających pewną własność. Udowodnione przez nas twierdzenia pokazują, że istnieją pewne własności (mianowicie regularne nieoddalanie, uśrednione nieoddalanie, uśredniona afiniczność) rodziny $\mathcal{S}$, które przenoszą się na zbudowane – wraz ze zbiorem $C^\bigstar$ – na bazie tej rodziny przekształcenie $F : C^\bigstar \to C^\bigstar$. Można wyrazić to za pomocą formuły*

$$\forall_{T\in\mathcal{S}} T \in \Phi \implies F \in \Phi\,.$$

Zauważmy, że twierdzenie 3.3.5 można rozszerzyć.

Twierdzenie 3.3.7. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną wszystkich afinicznych przekształceń ograniczonego i wypukłego podzbioru przestrzeni Banacha C. Wtedy rodzina*

$$\mathcal{S}_{\left\langle\frac{1}{2},1\right)} = \left\{\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T : T \in \mathcal{S} \wedge \alpha \in \left\langle\frac{1}{2},\, 1\right)\right\}$$

jest uniwersalnie jednostajnie asymptotycznie regularna.

Dowód. Niech $S = \alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T$ oraz $T : C \to C$ będzie przekształceniem afinicznym. Przyjmijmy $\beta = 2\alpha - 1$. Definiując $S' = \beta\mathbb{I} + \overline{\beta}T$ widzimy, że $S' : C \to C$ jest przekształceniem afinicznym. Ponadto zachodzi

$$S = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + S').$$

Więc S jest przekształceniem $\frac{1}{2}$-uśrednionym afinicznym, a stąd $\mathcal{S}_{\left\langle\frac{1}{2},1\right)} = \mathcal{S}_{\frac{1}{2}}$. Teraz wystarczy wykorzystać twierdzenie 3.3.5. □

Analogicznie mamy dla wyniku Goebla i Kirka:

Twierdzenie 3.3.8. *Rodzina wszystkich α-uśrednionych nieoddalających przekształceń ograniczonego i wypukłego podzbioru przestrzeni Banacha, gdzie α przebiega zbiór $\left\langle\frac{1}{2},1\right)$, jest uniwersalnie jednostajnie asymptotycznie regularna.*

[2]Mamy tu na myśli teoriomnogościowe uogólnienie pojęcia zbioru.

Na koniec zauważmy, że jeśli istniałoby $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ takie, że $\mathcal{S}_\alpha \subset \mathcal{S}_{\left\langle\frac{1}{2},1\right)}$ to twierdzenia 3.3.7 i 3.3.8 można by automatycznie rozszerzyć do zbioru $\{\alpha\} \cup \left\langle\frac{1}{2}, 1\right)$. Niemniej jednak łatwo stwierdzić, że takie α nie istnieją. Oczywiście nie znaczy to, że wspominanych twierdzeń nie można dalej uogólnić; pokazuje jednak, że jeśli jest to możliwe to potrzebne są inne techniki dowodowe.

3.4 Twierdzenia o punktach stałych

Przestrzenie topologiczne

Z lematu 3.1.6 wynika twierdzenie, które nasuwa skojarzenia z twierdzeniami Brouwera, Schaudera, czy Schaudera-Tychonowa, z tym, że jest wysłowione dla przestrzeni ogólniejszej, bez struktury liniowej, w której nie można więc zdefiniować wypukłości.

Twierdzenie 3.4.1. *Ciągłe przekształcenie T zbioru zwartego C, które dla pewnej ciągłej funkcji f rozróżniającej punkty na C jest (przynajmniej punktowo) f-asymptotycznie regularne, posiada punkt stały.*

Silniejsza, jednostajna f-asymptotyczna regularność pozwala otrzymać wyniki dla rodzin przekształceń. Co ciekawe, w takim przypadku ciągłość f nie będzie wymagana.

Twierdzenie 3.4.2. *Dowolna rodzina $\mathcal{S}$ jednostajnie f-asymptotycznie regularnych przekształceń o własności $(\mathcal{SC})$, określonych na zbiorze zwartym, posiada wspólny punkt stały.*

Dowód. Niech C będzie zbiorem, na którym elementy naszej rodziny stają się suriekcjami. Wtedy dla każdego przekształcenia z $\mathcal{S}$ zastosować można osobno lemat 3.1.2, z czego już wynika teza twierdzenia. □

Zauważmy, że dowód twierdzenia dopuszcza, żeby każde przekształcenie $T \in \mathcal{S}$ posiadało swoją funkcję f_T, która spowoduje jednostajną f_T-asymptotyczną regularność T.

Mamy przydatny wariant dla półgrup przekształceń, w których niekoniecznie wszystkie przekształcenia są jednostajnie f-asymptotycznie regularne. Sformułujmy go w sposób przypominający lemat 2.1.1.

Lemat 3.4.3. *Dowolna półgrupa $\mathcal{S}$ generowana przez rodzinę $\mathcal{A}$ jednostajnie f-asymptotycznie regularnych przekształceń o własności $(\mathcal{SC})$ posiada następującą własność:*

> *Dla dowolnego zbioru zwartego, który jest niezmienniczy dla $\mathcal{S}$, rodzina $\mathcal{S}$ posiada punkt stały na tym zbiorze.*

Dowód. Z twierdzenia 3.4.2 wynika, że istnieje niepusty zbiór C, na którym elementy $\mathcal{A}$ stają się identycznościami. Ponieważ każdy element z $\mathcal{S}$ jest złożeniem skończonej ilości elementów z $\mathcal{A}$, wnioskujemy

$$\emptyset \neq C \subset Fix\mathcal{S}.$$

□

Zauważmy, że mając twierdzenie o istnieniu punktu stałego dla komutującej rodziny przekształceń zbioru zwartego wystarczy, że dla danej rodziny wykażemy komutowanie w jednym punkcie (patrz definicja 2.1.2). Ów schemat rozumowania zaprezentujemy wykorzystując twierdzenie 3.4.2:

Twierdzenie 3.4.4. *Dowolna rodzina jednostajnie f-asymptotycznie regularnych ciągłych przekształceń zwartego zbioru, które komutują przynajmniej w jednym miejscu posiada wspólny punkt stały.*

Dowód. Niech $\mathcal{S}$ oraz C będą odpowiednio rodziną i zbiorem o których mowa w lemacie. Zbiór $A = \gamma(\mathcal{S})$ jest domkniętym podzbiorem zwartego zbioru C, więc sam jest zwarty. Ponadto rodzina $\mathcal{S}$ komutuje na A, wykorzystując zatem twierdzenie 3.4.2 mamy wspólny punkt stały. □

Przestrzenie Banacha

Poniższe twierdzenia są szczególnymi przypadkami wysłowionych wyżej bardziej abstrakcyjnych wersji.

Wniosek 3.4.5. *Regularnie nieoddalające przekształcenie T ograniczonego podzbioru C przestrzeni Banacha posiada punkt stały na każdym zbiorze, na którym staje się suriekcją.*

Dowód. Z twierdzenia 3.3.3 (wraz z lematem 3.1.4) wynika, że T jest jednostajnie asymptotycznie regularne na C. Niech T będzie suriekcją na $A \subset C$. Stąd z 3.1.2 otrzymujemy żądany wynik. □

Wniosek 3.4.6. *Uśrednione nieoddalające przekształcenie T ograniczonego i wypukłego podzbioru C przestrzeni Banacha posiada punkt stały na każdym zbiorze, na którym staje się suriekcją.*

Dowód. Dowód przebiega analogicznie, z tym, że używamy twierdzenia 3.3.4 zamiast 3.3.3. Albo bezpośrednio twierdzenia 3.2.4. □

Podobnie z twierdzenia 3.2.9 mamy też

Wniosek 3.4.7. *Uśrednione afiniczne przekształcenie T ograniczonego i wypukłego podzbioru C przestrzeni Banacha posiada punkt stały na każdym zbiorze, na którym staje się suriekcją.*

Teraz możemy uogólnić to na rodziny przekształceń.

Twierdzenie 3.4.8. *Niech w przestrzeni Banacha $\mathcal{S}$ będzie rodziną generowaną przez:*

- *regularnie nieoddalające przekształcenia ograniczonego zbioru,*
- *uśrednione nieoddalające przekształcenia ograniczonego i wypukłego zbioru,*
- *uśrednione afiniczne przekształcenia ograniczonego i wypukłego zbioru,*
- *przekształcenia z powyższych trzech rodzin ograniczonego i wypukłego zbioru.*

Wtedy rodzina $\mathcal{S}$ posiada punkt stały na każdym zbiorze, na którym staje się rodziną suriekcji.

Dowód. Prawdziwość twierdzenia otrzymujemy stosując jeden z wyżej udowodnionych wniosków oddzielnie do każdego z przekształceń z $\mathcal{S}$. $\square$

Rozdział 4

Retrakcje

4.1 Pojęcia wstępne

Definicja 4.1.1 (Idempotent). *Niech* $A \subset B \subset C$. *Przekształcenie* $R : C \to B$ *nazwiemy idempotentem na zbiór* A*, jeśli*

$$RC = A = FixR.$$

Zbiór A *nazwiemy retraktem* C*, jeśli istnieje idempotent* R *na* A*, który jest przekształceniem ciągłym (retrakcją) w danej topologii. Jeśli dodatkowo* R *jest nieoddalające, afiniczne, itd., to mówimy o retrakcji/retrakcie nieoddalającym, afinicznym, itd.*

Przyjmujemy, że jeśli nie jest powiedziane wprost na jaki zbiór mamy idempotent (retrakcję), to jest to idempotent (retrakcja) na wskazaną przeciwdziedzinę. Ponadto jeśli chcemy wskazać konkretną topologię τ, w której retrakcja jest ciągła, powiemy o τ-retrakcji. Tak więc przykładowo słaba afiniczna retrakcja $R : C \to A$ jest to słabo ciągłe, afiniczne przekształcenie, idempotentne na zbiorze A.

Poniższy lemat okaże się przydatnym narzędziem.

Lemat 4.1.2. *Niech dany będzie uogólniony ciąg* $(R_\alpha)_\alpha$ *przekształceń* $R_\alpha : C \to C$*, gdzie* C *jest zwarte. Wtedy istnieje subtelniejszy ciąg uogól-*

niony $(R_{\alpha_\gamma})_\gamma$ *oraz takie* $R : C \to C$*, że zachodzi*

$$Rx = \tau\text{-}\lim_\gamma R_{\alpha_\gamma} x.$$

Dowód. Z twierdzenia Tychonowa wynika, że C^C jest zwarte w topologii produktowej. Ponieważ $(R_\alpha)_\alpha \subset C^C$, to istnieje subtelniejszy od niego ciąg uogólniony $(R_{\alpha_\gamma})_\gamma$, który jest zbieżny. Możemy zdefiniować

$$R = \lim_\gamma R_{\alpha_\gamma} \in C^C.$$

Powyższa granica powinna być rozumiana jako wzięta w topologii produktowej. Traktując aplikację R do $x \in C$ jako projekcję na x-tą współrzędną i wiedząc, że takie projekcje są ciągłe w topologii produktowej otrzymujemy

$$Rx = \lim_\gamma R_{\alpha_\gamma} x.$$

□

Od Brucka ([Br2][Twierdzenie 3]) pochodzi następujące[1]

Twierdzenie 4.1.3. *Niech na przestrzeni topologicznej* C *będzie dana półgrupa przekształceń* $\mathcal{S}$ *(niekoniecznie semitopologiczna w topologii* C*). Załóżmy, że* $\mathcal{S}$ *jest zwarte w topologii produktowej oraz posiada następującą własność:*

($\mathcal{FP}$) *Każdy domknięty podzbiór* C*, który jest niezmienniczy dla* $\mathcal{S}$ *zawiera punkt stały rodziny* $\mathcal{S}$*.*

Wtedy istnieje w $\mathcal{S}$ *idempotent* $R : C \to Fix\mathcal{S}$*.*

4.2 Jednostajna asymptotyczna regularność a retrakcje

Wyprowadźmy bardziej przystępną dla nas wersję twierdzenia Brucka.

[1]Zwróćmy uwagę, że to co Bruck nazywa retrakcją, u nas nazywa się idempotentem.

Wniosek 4.2.1. *Niech $\mathcal{S}$ będzie półgrupą ciągłych przekształceń zwartej przestrzeni topologicznej C o własności ($\mathcal{FP}$). Wtedy istnieje w $\overline{\mathcal{S}}$ idempotent $R : C \to Fix\mathcal{S}$.*

Dowód. Zauważmy, że jeśli $S, T \in \overline{\mathcal{S}}$, to wtedy istnieją ciągi uogólnione $(S_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, $(T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ takie, że $S = \tau\text{-}\lim_\alpha S_\alpha$ i $T = \tau\text{-}\lim_\gamma S_\gamma$. Zauważmy, że przy ustalonym $\alpha \in \Lambda$ mamy $(S_\alpha T_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \subset \mathcal{S}$. Z ciągłości S_α wynika, że

$$\overline{\mathcal{S}} \ni \lim_\gamma S_\alpha T_\gamma = S_\alpha \lim_\gamma T_\gamma = S_\alpha T.$$

Stąd $(S_\alpha T)_{\alpha\in\Lambda} \subset \overline{\mathcal{S}}$ i znowu

$$\overline{\mathcal{S}} = \overline{\overline{\mathcal{S}}} \ni \lim_\alpha S_\alpha T = S \circ T.$$

Stąd $\overline{\mathcal{S}}$ ma strukturę półgrupy. Ponieważ jest także domkniętym podzbiorem zwartego zbioru C^C, możemy zastosować twierdzenie Brucka, żeby otrzymać idempotent $R : C \to Fix\overline{\mathcal{S}}$, który należy do $\overline{\mathcal{S}}$. Ponieważ

$$x \in Fix\mathcal{S} \implies T_\alpha x = x \implies Tx = x$$

to z dowolności wyboru $T \in \overline{\mathcal{S}}$ wynika $Fix\mathcal{S} \subset Fix\overline{\mathcal{S}}$. Przy oczywistej inkluzji w drugą stronę wnioskujemy, że R jest rzeczywiście idempotentem na $Fix\mathcal{S}$. □

Stąd mamy

Lemat 4.2.2. *Niech półgrupa $\mathcal{S}$ ciągłych jednostajnie f-asymptotycznie regularnych przekształceń zwartego zbioru C posiada własność ($\mathcal{SC}$). Wtedy istnieje w $\overline{\mathcal{S}}$ idempotent $R : C \to Fix\mathcal{S}$.*

Dowód. Niech domknięty zbiór $A \subset C$ będzie niezmienniczy dla $\mathcal{S}$. Wtedy A jest też zwarte. Z własności ($\mathcal{SC}$) wnioskujemy więc, że istnieje zwarty podzbiór $B \subset A$, na którym $\mathcal{S}$ jest suriekcją. Z 3.1.2 wnioskujemy więc, że A zawiera punkt stały $\mathcal{S}$. Dowolność wyboru A gwarantuje, że C posiada własność ($\mathcal{FP}$). Oczywiście reszta założeń wniosku 4.2.1 jest też spełniona, więc teza lematu rzeczywiście zachodzi. □

Pokażemy warunek wystarczający do tego, żeby tak powstały idempotent był retrakcją.

Równociągłość

Definicja 4.2.3 (Przekształcenia jednakowo ciągłe). *Niech C będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Powiemy, że przekształcenia $\mathcal{S}$ zbioru C są jednakowo ciągłe (lub równociągłe) na C, jeśli*

$$\forall_{x\in C}\forall_{V\in\tau_0}\exists_{U\in\tau_0}\forall_{T\in\mathcal{S}}\forall_{y\in C}x-y\in U \implies Tx-Ty\in V.$$

Przez τ_0 oznaczamy otoczenia zera danej przestrzeni. Oczywiście jednakowa ciągłość implikuje zwykłą ciągłość.

Lemat 4.2.4. *W przestrzeni liniowo-topologicznej punktowa granica ciągu uogólnionego przekształceń jednakowo ciągłych jest przekształceniem ciągłym.*

Dowód. Niech $(T_\alpha)_\alpha$ będzie ciągiem uogólnionym przekształceń jednakowo ciągłych z granicą T. Przy dowolnym $x\in C$ oraz $V\in\tau_0$ obierzmy $B\in\tau_0$ takie, że $\overline{B}\subset V$ (patrz lemat 1.3.2). Mamy wtedy $U\in\tau_0$ takie, że dla każdego α

$$x-y\in U \implies T_\alpha x-T_\alpha y\in B.$$

Stąd przechodząc do granicy otrzymujemy

$$x-y\in U \implies Tx-Ty\in\overline{B}\subset V.$$

□

Dlatego mamy następujący wariant lematu 4.2.2:

Twierdzenie 4.2.5. *Niech półgrupa $\mathcal{S}$ przekształceń zwartego podzbioru C przestrzeni liniowo-topologicznej, które są jednostajnie f-asymptotycznie regularne i jednakowo ciągłe posiada własność $(\mathcal{SC})$. Wtedy istnieje retrakcja $R: C\to Fix\mathcal{S}$, która należy do $\overline{\mathcal{S}}$.*

Ponieważ dalej zajmować się będziemy przekształceniami afinicznymi, istotna dla nas okaże się poniższa własność:

Lemat 4.2.6. *Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną przekształceń jednakowo ciągłych na przestrzeni liniowo-topologicznej C. Wtedy $\hat{\mathcal{A}}$, rodzina wszystkich kombinacji wypukłych elementów rodziny $\mathcal{A}$, jest także jednakowo ciągła.*

Dowód. Weźmy dowolne $V \in \tau_0$ i $x \in C$. Z równociągłości rodziny $\mathcal{A}$ mamy otoczenie zera U, takie że

$$\forall_{T \in \mathcal{A}} \forall_{y \in C} x - y \in U \implies Tx - Ty \in V.$$

Wybierzmy dowolny element $\hat{\mathcal{A}}$, to jest dowolną kombinację wypukłą

$$\hat{T} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T_k$$

elementów rodziny $\mathcal{A}$. Jeśli $x - y \in U$, to

$$\hat{T}x - \hat{T}y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (T_k x - T_k y) \in \sum_{k=1}^{n} \alpha_k V = V.$$

Podsumowując, przy dowolnym otoczeniu zera V i punkcie x wskazaliśmy otoczenie zera U takie, że

$$\forall_{\hat{T} \in \hat{\mathcal{A}}} \forall_{y \in C} x - y \in U \implies \hat{T}x - \hat{T}y \in V.$$

Tak więc jednakowa ciągłość $\hat{\mathcal{A}}$ została dowiedziona. □

Retrakcja dla przekształceń afinicznych

Lemat 4.2.7. *Granica uogólnionego ciągu afinicznych przekształceń jest przekształceniem afinicznym.*

Dowód. Dla $x, y \in C$, $\lambda \in (0, 1)$ mamy

$$T(\lambda x + \overline{\lambda} y) = \lim_{\alpha} T_\alpha(\lambda x + \overline{\lambda} y) = \lim_{\alpha} \lambda T_\alpha x + \lim_{\alpha} \overline{\lambda} T_\alpha y = \lambda T x + \overline{\lambda} T y.$$

□

Lemat 4.2.8. *Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną przekształceń afinicznych. Wtedy dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$, półgrupa $\hat{\mathcal{S}}$ generowana przez uśrednioną rodzinę*

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\alpha \mathbb{I} + \overline{\alpha} T : T \in \mathcal{S}\}$$

jest półgrupą przekształceń afinicznych. Ponadto, jeśli rodzina $\mathcal{S}$ komutuje, to komutuje także $\hat{\mathcal{S}}$.

Dowód. Dowód przeprowadzić można przez indukcję. Opiera się on przede wszystkim na tym, że dla $\tilde{T}$, $\tilde{S} \in \tilde{\mathcal{S}}$, złożenie $\tilde{T}\tilde{S}$ jest przekształceniem afinicznym. Rzeczywiście, przyjmijmy $\tilde{T} = \alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}\, T$ i analogicznie dla $\tilde{S}$. Wtedy

$$\tilde{T}\tilde{S}(\lambda x + \overline{\lambda} y) = (\alpha^2\mathbb{I} + \alpha\overline{\alpha}S + \overline{\alpha}\alpha T + \overline{\alpha}^2 TS)(\lambda x + \overline{\lambda} y) =$$

$$\lambda(\alpha^2 x + \alpha\overline{\alpha}Sx + \overline{\alpha}\alpha Tx + \overline{\alpha}^2 TSx) + \overline{\lambda}(\alpha^2 y + \alpha\overline{\alpha}Sy + \overline{\alpha}\alpha Ty + \overline{\alpha}^2 TSy) =$$

$$\lambda\tilde{S}\tilde{T}x + \overline{\lambda}\tilde{S}\tilde{T}y.$$

Natomiast, jeśli chodzi o przemienność zauważmy, że dowolne dwa przekształcenia z $\tilde{\mathcal{S}}$ komutują:

$$\begin{aligned}\tilde{T}\tilde{S} &= (\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T)\tilde{S} = \alpha\tilde{S} + \overline{\alpha}T\tilde{S} = \alpha(\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}S) + \overline{\alpha}T(\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}S)\\ &= \alpha^2\mathbb{I} + \alpha\overline{\alpha}S + \overline{\alpha}\alpha T + \overline{\alpha}^2 TS = \alpha^2\mathbb{I} + \alpha\overline{\alpha}T + \overline{\alpha}\alpha S + \overline{\alpha}^2 ST\\ &= \alpha(\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T) + \overline{\alpha}S(\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T) = \alpha\tilde{T} + \overline{\alpha}S\tilde{T} = \tilde{S}\tilde{T}.\end{aligned}$$

Teraz wystarczy zauważyć że każde przekształcenie z $\hat{\mathcal{S}}$ jest złożeniem skończonej ilości przekształceń z $\tilde{\mathcal{S}}$:

$$\hat{T} = \tilde{T}_1 ... \tilde{T}_l,$$

$$\hat{S} = \tilde{S}_1 ... \tilde{S}_m.$$

Pokazujemy, że $\hat{T}\hat{S}$ jest afiniczne i przemienne przeprowadzając dowód indukcyjny ze względu na $n = l + m$. □

Lemat 4.2.9. *Niech $\mathcal{S}$ będzie półgrupą jednakowo ciągłych, afinicznych przekształceń. Wtedy dla dowolnego $\alpha \in (0, 1)$, półgrupa $\hat{\mathcal{S}}$ generowana przez uśrednioną rodzinę*

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T : T \in \mathcal{S}\}$$

jest równociągła.

Dowód. Z lematu 4.2.6 wnioskujemy, że wszystkie kombinacje wypukłe elementów rodziny $\mathcal{S}$ są jednakowo ciągłe. Dlatego wystarczy pokazać, że dowolne przekształcenie $\hat{T} \in \hat{\mathcal{S}}$ jest kombinacją wypukłą elementów rodziny $\mathcal{S}$.

Oczywiście $\hat{T}$ jest złożeniem pewnej ilości, powiedzmy n przekształceń z $\tilde{\mathcal{S}}$. Gdy $n = 1$, to widzimy wprost, że nasze założenie jest prawdą. Załóżmy, że teza indukcyjna jest prawdziwa dla pewnego n, to jest przekształcenie

$$\hat{T} = \tilde{T}_1 ... \tilde{T}_n$$

można przedstawić jako pewną kombinację wypukłą przekształceń z $\mathcal{S}$:

$$\hat{T} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k S_k.$$

Wtedy dla $\tilde{T}_{n+1} = \alpha \mathbb{I} + \overline{\alpha}\, T_{n+1} \in \tilde{\mathcal{S}}$ mamy

$$\begin{aligned} \hat{T}\tilde{T}_{n+1} &= \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k S_k \right) \tilde{T}_{n+1} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k S_k \tilde{T}_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_k (\alpha S_k + \overline{\alpha} S_k T_{n+1}) = \sum_{k=1}^{2m} \beta_k S_k, \end{aligned}$$

gdzie $S_k = S_{k-m} T_{n+1}$ dla $k > m$ i

$$\beta_k = \begin{cases} \alpha_k \alpha, & 1 \le k \le m, \\ \alpha_{k-m} \overline{\alpha}, & m < k \le 2m. \end{cases}$$

Ponieważ $\mathcal{S}$ jest półgrupą, wszystkie S_k należą do $\mathcal{S}$. Ponadto proste rachunki pokazują, że mamy do czynienia z kombinacją wypukłą. Kończy to dowód indukcyjny. □

Gdybyśmy pominęli założenie o tym, że $\mathcal{S}$ jest półgrupą, lemat przestałby być prawdziwy. Rzeczywiście, niech dla $c > 1$ dane będzie przekształcenie liniowe

$$Tx = cx,\ x \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy

$$\left| T^k x - T^k y \right| = c^k |x - y|,\ k \in \mathbb{N}.$$

Ponieważ c^k rośnie nieograniczenie, widzimy stąd, że warunek równociągłości nie może być spełniony dla półgrupy $\{T^k : k \in \mathbb{N}\}$ potęg przekształcenia T.

Twierdzenie 4.2.10. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przemienną rodziną τ-ciągłych, afinicznych przekształceń wypukłego, τ-zwartego i ograniczonego podzbioru C przestrzeni unormowanej takiego, że C jest przestrzenią liniowo-topologiczną w topologii τ. Wtedy istnieje afiniczny idempotent $R : C \to Fix\mathcal{S}$. Jeśli ponadto elementy $\mathcal{S}$ są τ-równociągłe, a $\mathcal{S}$ ma strukturę półgrupy, to R jest τ-retrakcją.*

Dowód. Niech przy $\alpha \in (0, 1)$

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{\alpha\mathbb{I} + \overline{\alpha}T : T \in \mathcal{S}\}.$$

Chcielibyśmy zastosować lemat 4.2.2, ale ponieważ $\tilde{\mathcal{S}}$ nie musi być półgrupą, weźmiemy $\hat{\mathcal{S}}$, półgrupę generowaną przez $\tilde{\mathcal{S}}$. Przekształcenia z $\hat{\mathcal{S}}$:

- są ciągłe,
- komutują,
- są afiniczne.

Ciągłość jest oczywista, pozostałe dwie własności wynikają z lematu 4.2.8. W takim razie elementy półgrupy $\hat{\mathcal{S}}$ są jednostajnie asymptotycznie regularne (twierdzenie 3.2.9) i $\hat{\mathcal{S}}$ ma własność $(\mathcal{SC})$ (twierdzenie 2.1.1), więc na mocy lematu 4.2.2 istnieje idempotent R leżący w domknięciu półgrupy $\hat{\mathcal{S}}$. W związku z tym, że R jest granicą pewnego ciągu uogólnionego $(\hat{T}_\alpha) \subset \hat{\mathcal{S}}$ afinicznych przekształceń, z lematu 4.2.7 mamy afiniczność R.

Żeby udowodnić drugą część lematu, załóżmy równociągłość $\mathcal{S}$ i przyjmijmy, że ma strukturę półgrupy. Wtedy zachodzi ciąg implikacji:

- Z lematu 4.2.9 wynika, że półgrupa $\hat{\mathcal{S}}$ jest równociągła,
- Z lematu 4.2.4 wynika, że przekształcenie R jest ciągłe.

Ostatni punkt kończy dowód, gdyż R jako ciągły idempotent jest retrakcją. □

Jest to uogólnienie twierdzenie Markowa-Kakutaniego, gdyż mówi nie tylko o tym, że $Fix\mathcal{S} \neq \emptyset$, ale poprzez R określa też jego strukturę. Pierwszy raz dowód przedstawiony został w [BoWi2].

Wniosek 4.2.11. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przemienną rodziną ciągłych afinicznych przekształceń wypukłego, słabo zwartego podzbioru przestrzeni Banacha. Wtedy istnieje afiniczny idempotent $R : C \to Fix\mathcal{S}$. Ponadto, jeśli $\mathcal{S}$ jest półgrupą słabo lub silnie jednakowo ciągłych przekształceń, to R jest silnie ciągłe.*

Dowód. Zauważmy, że ([Kra][Wniosek 6]):

- domknięte i wypukłe zbiory są słabo domknięte,
- dla afinicznych przekształceń na C: silna ciągłość $\iff$ słaba ciągłość.

Czyli $\mathcal{S}$ jest przemienną rodziną słabo ciągłych afinicznych przekształceń słabo zwartego, wypukłego i ograniczonego zbioru. Stąd, z pierwszej części twierdzenia 4.2.10 mamy afiniczny idempotent R na $Fix\mathcal{S}$.

Przyjmijmy, że $\mathcal{S}$ jest półgrupą. Jeśli jest to półgrupa słabo jednakowo ciągła, to z drugiej części twierdzenia 4.2.10 wiemy, że R jest słabo ciągłe i ponieważ jest afiniczne i zdefiniowane na zbiorze wypukłym, to jest silnie ciągłe.

Załóżmy teraz silną jednakową ciągłość półgrupy $\mathcal{S}$. Pamiętamy, że R jest słabo ciągłą granicą pewnego ciągu uogólnionego $(\hat{T}_\alpha)_\alpha \subset \hat{\mathcal{S}}$:

$$R = w\text{-}\lim_\alpha \hat{T}_\alpha.$$

Z lematu 4.2.9 wnioskujemy, że przekształcenia $(\hat{T}_\alpha)_\alpha$ są silnie jednakowo ciągłe. Z definicji równociągłości (wyrażonej w przestrzeni unormowanej), dla ustalonego $x \in C$, $\epsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że dla każdego y i α

$$\|x - y\| < \delta \implies \left\|\hat{T}_\alpha x - \hat{T}_\alpha y\right\| < \epsilon.$$

Ze słabej dolnej półciągłości normy mamy

$$\begin{aligned}\epsilon &> \left\|\hat{T}_\alpha x - \hat{T}_\alpha y\right\| \geq \liminf_\alpha \left\|\hat{T}_\alpha x - \hat{T}_\alpha y\right\| \geq \left\|w\text{-}\lim_\alpha(\hat{T}_\alpha x - \hat{T}_\alpha y)\right\| \\ &= \|Rx - Ry\|.\end{aligned}$$

Dowodzi to ciągłości R. □

Uwaga 4.2.12. *W [Ph][Twierdzenie 5.8] mamy inny wynik (dla przekształceń prawie okresowych), który daje ciągłą afiniczną retrakcję z tym, że jest przeprowadzony dla ściśle wypukłej przestrzeni Banacha.*

4.3 Retrakcje dla rodzin nieskończonych z retrakcji dla rodzin skończonych

Przypomnijmy kilka podstawowych definicji z teorii porządków.

Definicja 4.3.1. *Praporządkiem nazwiemy relację, która jest zwrotna i przechodnia. Zbiorem skierowanym nazwiemy zbiór C z zadaną na nim relacją praporządku $\leq$ spełniającą dodatkowy warunek:*

$$\forall_{x,\,y\in C}\exists_{z\in C} x \leq z \wedge y \leq z.$$

Liniowym porządkiem nazwiemy praporządek, który jest:

- *antysymetryczny, czyli* $\forall_{x,y} x \leq y \wedge y \leq x \implies x = y$,
- *spójny, czyli* $\forall_{x,y} x \leq y \vee y \leq x$.

Zbiór z zadanym na nim liniowym porządkiem nazwiemy zbiorem liniowo uporządkowanym. Ponadto antysymetryczny praporządek nazywamy częściowym porządkiem, a zbiór z relacją częściowego porządku zbiorem częściowo uporządkowanym.

Zauważmy, że zbiory liniowo uporządkowane są także zbiorami skierowanymi.

Punktem wyjścia będzie następująca konstrukcja.

Definicja 4.3.2. *Dla rodziny $\mathcal{S}$ przekształceń zbioru C, niech $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ oznacza zbiór wszystkich retrakcji z C na $Fix\mathcal{S}$. W przypadku zbiorów jednoelementowych przyjmujemy $\mathcal{R}(\{T\}) = \mathcal{R}(T)$.*

Definicja 4.3.3. *Dla rodziny przekształceń $\mathcal{S}$ zdefiniujmy zbiór*

$$\Lambda = \{\alpha \subset \mathcal{S} : \#\alpha < \infty \wedge \mathcal{R}(\alpha) \neq \emptyset\}. \tag{4.1}$$

Na Λ zadajmy praporządek jako relację inkluzji. Powiemy, że $\mathcal{S}$ ma własność skończonych retrakcji, jeśli spełnione są poniższe warunki:

- $\forall_{T\in\mathcal{S}}\exists_{\alpha\in\Lambda}\, T \in \alpha$,
- *Λ jest zbiorem skierowanym.*

Ponadto powiemy, że $\mathcal{S}$ ma własność:

- *nieoddalających skończonych retrakcji, jeśli $\mathcal{R}(\alpha)$ we wzorze 4.1 ograniczymy do nieoddalających retrakcji,*
- *afinicznych skończonych retrakcji, jeśli $\mathcal{R}(\alpha)$ we wzorze 4.1 ograniczymy do afinicznych retrakcji,*
- *itd.*

Zauważmy, że przy Λ zdefiniowanym jak wyżej, istnieje selektor[2] dla rodziny $\{\mathcal{R}(\alpha) : \alpha \in \Lambda\}$. Taki selektor możemy opisać jako indeksowaną rodzinę $(R_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, gdzie oczywiście $R_\alpha \in \mathcal{R}(\alpha)$. Stąd

Lemat 4.3.4. *Niech na zbiorze zwartym C dana będzie rodzina ciągłych przekształceń $\mathcal{S}$ o własności skończonych retrakcji. Wtedy z rodziny $(R_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ możemy wybrać ciąg uogólniony, którego granicą będzie idempotent $R : C \to Fix\mathcal{S}$. Albo inaczej, istnieje w domknięciu $\overline{(R_\alpha)}_{\alpha\in\Lambda}$ idempotent R.*

Dowód. Skoro Λ jest zbiorem skierowanym, to $(R_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subset C^C$ jest ciągiem uogólnionym. Z lematu 4.1.2 otrzymujemy $R \in C^C$ takie, że

$$Rx = \lim_\gamma R_{\alpha_\gamma} x. \tag{4.2}$$

[2]Selektorem danej rodziny zbiorów nazywamy zbiór zawierający dokładnie po jednym elemencie z każdego członka rodziny. Istnienie selektora gwarantuje aksjomat wyboru.

Dla $T \in \mathcal{S}$ weźmy $\alpha \ni T$ oraz γ_0 (którego istnienie wynika z definicji subtelniejszego ciągu uogólnionego) takie, że

$$\forall_{\gamma \geq \gamma_0} \alpha_\gamma \geq \alpha \geq \{T\}.$$

Wtedy dla dowolnego $x \in C$:

$$\forall_{\gamma \geq \gamma_0} R_{\alpha_\gamma} x \in Fix_{\alpha_\gamma} \subset Fix_{\alpha_{\gamma_0}} \subset FixT,$$

więc $R_{\alpha_\gamma} x$ od któregoś momentu leży w domkniętym zbiorze $FixT$. Stąd także granica Rx należy do $FixT$. Z dowolności wyboru T i x otrzymujemy $RC \subset FixT$. Ale także

$$x \in Fix\mathcal{S} \implies x \in Fix_{\alpha_\gamma} \implies R_{\alpha_\gamma} x = x \implies Rx = x \implies x \in FixR.$$

Czyli

$$RC \subset Fix\mathcal{S} \subset FixR \subset RC,$$

więc wprost z definicji przekształcenie R rzeczywiście jest idempotentem na $Fix\mathcal{S}$. □

Oczywiście powyższy lemat ma wariant dla rodzin o własności nieoddalających skończonych retrakcji, afinicznych skończonych retrakcji, itd. Ponadto w przypadku przeliczalnym sytuacja się upraszcza. Przypomnijmy, że dla danego ciągu $(a_n)_n$, odcinkiem początkowym A_m tego ciągu nazywamy zbiór $\{a_n : n \leq m\}$.

Wniosek 4.3.5. *Załóżmy, że rodzinę przekształceń $\mathcal{S}$ można ustawić w ciąg $(T_n)_n$. Zdefiniujmy*

$$\Lambda = \{A_n : \textit{istnieje retrakcja } C \to FixA_n\}.$$

Wtedy jeśli

$$\forall_{T \in \mathcal{S}} \exists_{A \in \Lambda} T \in A,$$

to w rodzinie $(R_A)_{A \in \Lambda}$ zdefiniowanej jak wcześniej, istnieje ciąg uogólniony, którego granicą jest idempotent $R : C \to Fix\mathcal{S}$.

Dowód. Zbiór odcinków Λ jest porządkiem liniowym, więc także zbiorem skierowanym. Także reszta warunków lematu 4.3.4 jest spełniona. □

Oczywiście lemat 4.3.4 sam w sobie nie niesie większej wartości. Jednakże można łatwo pokazać, że pewne własności skończonych retrakcji R_α przenoszą się na przypadek nieskończony R. Idea polega na tym, aby zagwarantować, żeby dana własność została zachowana po wzięciu granicy.

Twierdzenie 4.3.6. *Niech na zwartym zbiorze C dana będzie rodzina ciągłych przekształceń $\mathcal{S}$ o własności skończonych afinicznych retrakcji. Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest afinicznym idempotentem C.*

Dowód. Wykorzystując równanie 4.2 wraz z lematem 4.2.7 otrzymujemy postulowany wynik. □

Mamy też wersję dla przekształceń nieoddalających, jednakże wymaga ona dodatkowego założenia.

Twierdzenie 4.3.7. *Niech C będzie τ-zwartym podzbiorem przestrzeni metrycznej, w której metryka jest τ-dolnie półciągła. Niech na C dana będzie rodzina ciągłych przekształceń $\mathcal{S}$ o własności nieoddalających skończonych retrakcji. Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest nieoddalającym retraktem C.*

Dowód. Dowód Twierdzenia 4.3.4 uzupełniamy następującą linijką

$$\begin{aligned} d(Rx, Ry) &= d(\tau\text{-}\lim_{\gamma} R_{\alpha_\gamma}x, \tau\text{-}\lim_{\gamma} R_{\alpha_\gamma}y) \\ &\leq \lim_{\gamma} d(R_{\alpha_\gamma}x, R_{\alpha_\gamma}y) \leq d(x, y). \end{aligned}$$

□

W silnej topologii podobnie dziedziczy się własność regularnego nieoddalania.

Twierdzenie 4.3.8. *Niech na zwartym podzbiorze C przestrzeni metrycznej dana będzie rodzina ciągłych przekształceń $\mathcal{S}$ o własności regularnie nieoddalających skończonych retrakcji. Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest regularnie nieoddalającym retraktem C.*

Dowód.

$$\begin{aligned}\|Rx - Ry\| &= \left\|\lim_\gamma R_{\alpha_\gamma}x - \lim_\gamma R_{\alpha_\gamma}y\right\| = \lim_\gamma \left\|R_{\alpha_\gamma}x - R_{\alpha_\gamma}y\right\| \\ &\le \lim_\gamma \left\|\lambda(x-y) + \overline{\lambda}(R_{\alpha_\gamma}x - R_{\alpha_\gamma}y)\right\| \\ &= \left\|\lambda(x-y) + \overline{\lambda}(\lim_\gamma R_{\alpha_\gamma}x - \lim_\gamma R_{\alpha_\gamma}y)\right\| \\ &= \left\|\lambda(x-y) + \overline{\lambda}(Rx - Ry)\right\|.\end{aligned}$$

□

4.4 Twierdzenie o nieoddalającej retrakcji a dolna półciągłość

4.4.1 Ciągi przybliżonych punktów stałych

Dowód o istnieniu retrakcji, który zaraz przedstawimy będzie wykorzystywał ciągi przybliżonych punktów stałych.

Definicja 4.4.1 (Ciąg przybliżonych punktów stałych). *W przestrzeni metrycznej ciąg (a_n) nazywamy ciągiem przybliżonych punktów stałych (approximate fixed point sequence) danego przekształcenia T, jeśli*

$$d(Ta_n, a_n) \xrightarrow{n} 0.$$

Zachodzi

Lemat 4.4.2. *Asymptotycznie regularne przekształcenie posiada ciąg przybliżonych punktów stałych.*

Dowód. Niech $T : C \to C$ będzie asymptotycznie regularne w punkcie $x \in C$. Zauważmy, że mamy

$$\inf_{a\in C} d(Ta, a) \le d(T(T^n x), T^n x) = d(T^{n+1}x, T^n x) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Zatem

$$\forall_n \exists_{a_n} d(Ta_n, a_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Zdefiniowaliśmy w ten sposób ciąg $(a_n)_n$ który jest ciągiem przybliżonych punktów stałych przekształcenia T. □

Co ciekawe, mamy stąd dowód znanego faktu.

Twierdzenie 4.4.3. *Dla każdego nieoddalającego przekształcenia T ograniczonego i wypukłego podzbioru C przestrzeni Banacha istnieje ciąg przybliżonych punktów stałych.*

Dowód. Zdefiniujmy

$$\hat{T} = \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}T.$$

Przekształcenie $\hat{T}$ jest zdefiniowane na wypukłym i ograniczonym zbiorze, więc na mocy twierdzenia 3.3.4 jest asymptotycznie regularne. Stąd na mocy wcześniejszego lematu $\hat{T}$ ma ciąg przybliżonych punktów stałych $(a_n)_n$. Z faktu $T = 2\hat{T} - \mathbb{I}$,

$$\|Ta_n - a_n\| = \left\|2\hat{T}a_n - a_n - a_n\right\| = 2\left\|\hat{T}a_n - a_n\right\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Czyli $(a_n)_n$ jest także ciągiem przybliżonych punktów stałych T. □

Nadmieńmy tylko, że klasyczny dowód wykorzystuje twierdzenie Banacha o kontrakcji.

Lemat 4.4.4. *Jeśli $(x_n)_n$ jest ciągiem przybliżonych punktów stałych przekształcenia Q oraz $(Qx_n)_n$ jest ciągiem przybliżonych punktów stałych nieoddalającego przekształcenia P, to także (x_n) jest ciągiem przybliżonych punktów P.*

Dowód.

$$\begin{aligned}\|Px_n - x_n\| &\le \|Px_n - Qx_n\| + \|Qx_n - x_n\| \\ &\le \|Px_n - PQx_n\| + \|PQx_n - Qx_n\| + \|Qx_n - x_n\| \\ &\le 2\|Qx_n - x_n\| + \|PQx_n - Qx_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

□

Kluczowym elementem naszego twierdzenia okaże się

Lemat 4.4.5. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przemienną rodziną nieoddalających przekształceń zbioru C i niech istnieje nieoddalająca retrakcja $R : C \to Fix\mathcal{S}$. Załóżmy, że nieoddalające T komutuje z elementami $\mathcal{S}$. Wtedy dowolny przybliżony ciąg punktów stałych (x_n) przekształcenia TR jest także ciągiem przybliżonych punktów stałych przekształcenia T, jak i elementów $\mathcal{S}$.*

Dowód. Zauważmy, że dla każdego $S \in \mathcal{S}$ mamy

$$STRx_n = TSRx_n = TRx_n, \tag{4.3}$$

więc przyjmując $Q = TR$ i $P = S$ widzimy, że (x_n) jest ciągiem przybliżonych punktów stałych rodziny $\mathcal{S}$. Z równania 4.3 wynika także, że TRx_n jest punktem stałym dla rodziny $\mathcal{S}$, skąd mamy

$$RTRx_n = TRx_n.$$

Przyjmując tym razem $Q = TR$ i $P = R$ mamy $\|Rx_n - x_n\| \to 0$. Stąd

$$\begin{aligned}\|Tx_n - x_n\| &\le \|Tx_n - TRx_n\| + \|TRx_n - x_n\| \\ &\le \|x_n - Rx_n\| + \|TRx_n - x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

czyli (x_n) jest także ciągiem przybliżonych punktów stałych dla przekształcenia T. □

4.4.2 Pozostałe lematy

Lemat 4.4.6. *Jeśli norma (ogólniej metryka) danej przestrzeni jest τ-dolnie półciągła, to każdy τ-zwarty zbiór C tej przestrzeni jest domknięty w silnej topologii.*

Dowód. Niech ciąg uogólniony $(x_\alpha)_\alpha \subset C$ będzie zbieżny do x w silnej topologii. Wykażemy, że $x \in C$. Z τ-zwartości C mamy subtelniejszy ciąg uogólniony $(x_{\alpha_\gamma})_\gamma$, który jest τ-zbieżny do elementu w C. Dalej

$$\left\|\tau\text{-}\lim_\gamma x_{\alpha_\gamma} - x\right\| \le \liminf_\gamma \left\|x_{\alpha_\gamma} - x\right\| = \lim_\gamma \left\|x_{\alpha_\gamma} - x\right\| = 0.$$

Czyli

$$x = \tau\text{-}\lim_{\gamma} x_{\alpha_\gamma} \in C.$$

□

Lemat 4.4.7. *Jeśli* (T_α) *jest ciągiem uogólnionym nieoddalających przekształceń oraz* τ *jest topologią, w której norma jest* τ*-dolnie półciągła, to* $\tau\text{-}\lim_\alpha T_\alpha$ *(jeśli istnieje) jest przekształceniem nieoddalającym.*

Dowód. Niech

$$Tx = \tau\text{-}\lim_{\alpha} T_\alpha x.$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \|Tx - Ty\| &= \left\|\tau\text{-}\lim_{\alpha} T_\alpha x - \tau\text{-}\lim_{\alpha} T_\alpha y\right\| \\ &\leq \liminf_{\gamma} \|T_\alpha x - T_\alpha y\| \\ &\leq \liminf_{\gamma} \|x - y\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Lemat 4.4.8. *Niech* $\mathcal{S}$ *będzie rodziną przekształceń zbioru* C *i załóżmy, że istnieje retrakcja* $R : C \to Fix\mathcal{S}$*. Wtedy dla* $T : C \to C$ *zachodzi*

$$FixT \cap Fix\mathcal{S} \subset Fix(TR).$$

Dowód.

$$\begin{aligned} x \in FixT \cap Fix\mathcal{S} &\Longrightarrow x \in FixT \wedge x \in Fix\mathcal{S} \\ &\Longrightarrow Tx = x \wedge Rx = x \\ &\Longrightarrow TRx = x \implies x \in Fix(TR). \end{aligned}$$

□

4.4.3 Dowód twierdzenia

Zacznijmy od wersji dla skończonych rodzin.

Lemat 4.4.9. *Niech dany będzie τ-zwarty wypukły i ograniczony podzbiór C przestrzeni Banacha, w którym norma jest τ-dolnie półciągła. Niech $\mathcal{S}$ będzie skończoną rodziną przemiennych, τ-ciągłych, nieoddalających przekształceń zbioru C. Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest nieoddalającym retraktem zbioru C.*

Dowód. Rodzinie $\mathcal{S}$ narzućmy jeszcze jeden warunek: jednym z jej elementów musi być identyczność na C. Ponieważ oczywiście $Fix(\mathcal{S} \cup \mathbb{I}) = Fix\mathcal{S}$, dowód dla tak zmodyfikowanej rodziny da nam dowód dla rodziny oryginalnej. Stąd jeśli rodzina $\mathcal{S}$ posiada tylko jeden element, musi być nim identyczność i twierdzenie zachodzi trywialnie: $Fix\mathcal{S} = C$ jest nieoddalającym retraktem przy retrakcji $\mathbb{I}$.

Stosując indukcję matematyczną załóżmy teraz, że dla rodziny przekształceń $\mathcal{S}_n = \{T_1, ..., T_n\}$ istnieje nieoddalająca retrakcja

$$R_n : C \to Fix\mathcal{S}_n.$$

Na tej podstawie skonstruujemy inną nieoddalającą retrakcję (dla rodziny $\mathcal{S}_{n+1} = \mathcal{S}_n \cup \{T_{n+1}\}$)

$$R_{n+1} : C \to Fix\mathcal{S}_{n+1},$$

co zakończy dowód. Niech $\lambda \in (0, 1)$, $x \in C$. Zdefiniujmy

$$T_{x,\lambda} = \lambda x + \overline{\lambda} T_{n+1} R_n.$$

Jest to kontrakcja:

$$\|T_{x,\lambda} y - T_{x,\lambda} z\| = \overline{\lambda} \|T_{n+1} R_n y - T_{n+1} R_n z\| \leq \overline{\lambda} \|y - z\| .$$

Jako silnie domknięty podzbiór (lemat 4.4.6) przestrzeni zupełnej, samo C jest zbiorem (silnie) zupełnym. Dlatego z twierdzenia Banacha o kontrakcji mamy dokładnie jeden punkt $F_\lambda x \in C$ taki, że

$$T_{x,\lambda} F_\lambda x = F_\lambda x.$$

Definiuje to przekształcenie $F_\lambda : C \to C$. Stąd mamy wprost

$$F_\lambda x = T_{x,\lambda} F_\lambda x = \lambda x + \overline{\lambda} T_{n+1} R_n F_\lambda x. \tag{4.4}$$

Przekształcając powyższe otrzymujemy

$$\|T_{n+1}R_nF_\lambda x - F_\lambda x\| = \lambda \|T_{n+1}R_nF_\lambda x - x\| \leq \lambda \cdot diam(C). \tag{4.5}$$

Niech

$$\lambda_m = \frac{1}{m},\ m \in \mathbb{N}.$$

Dla wygody przyjmijmy

$$G_m = F_{\lambda_m}.$$

Wiedząc, że C jest ograniczone widzimy, że nierówność 4.5 przechodzi w

$$\|T_{n+1}R_nG_mx - G_mx\| \leq \lambda_m \cdot diam(C) = \frac{diam(C)}{m} \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Miejmy na uwadze, że powyższa zbieżność jest w silnej topologii. Stąd wnioskujemy, że ciąg $(G_m)_{m\in\mathbb{N}} \in C^C$ tworzy z każdym $x \in C$ ciąg przybliżonych punktów stałych przekształcenia $T_{n+1}R_n$. Z lematu 4.4.5 wnioskujemy, że jest to także prawdą dla rodziny $\mathcal{S}_{n+1}$:

$$\forall_{T\in\mathcal{S}_{n+1}}\forall_{x\in C} \lim_{m\to\infty} \|TG_mx - G_mx\| = 0. \tag{4.6}$$

Wykorzystując lemat 4.1.2, dla pewnego ciągu uogólnionego $(m_\alpha)_\alpha$ otrzymujemy $R_{n+1} : C \to C$ takie, że

$$R_{n+1}x = \tau\text{-}\lim_\alpha G_{m_\alpha}x.$$

Dalej, wykorzystując dla każdego $T \in \mathcal{S}_{n+1}$ τ-ciągłość T, τ-dolną półciągłość normy oraz równanie 4.6 otrzymujemy

$$\begin{aligned}\|TR_{n+1}x - R_{n+1}x\| &= \left\|T(\tau\text{-}\lim_\alpha G_{m_\alpha}x) - \tau\text{-}\lim_\alpha G_{m_\alpha}x\right\| \\ &\leq \liminf_\alpha \|TG_{m_\alpha}x - G_{m_\alpha}x\| = 0.\end{aligned}$$

Stąd

$$TR_{n+1}x = R_{n+1}x$$

i z dowolności wyboru T i x mamy

$$R_{n+1}C \subset Fix\mathcal{S}_{n+1}.$$

Ale także

$$
\begin{aligned}
TR_{n+1}x = x &\implies T_{x,\lambda_m}x = x \implies F_{\lambda_m}x = x \\
&\implies G_m x = x \implies R_{n+1}x = x
\end{aligned}
$$

i stąd

$$FixT_{n+1}R_n \subset FixR_{n+1}.$$

Ponadto z lematu 4.4.8 otrzymujemy

$$Fix\mathcal{S}_{n+1} \subset FixT_{n+1}R_n.$$

Łącząc trzy powyższe inkluzje (wraz z czwartą oczywistą) mamy

$$FixR_{n+1} \subset R_{n+1}C \subset Fix\mathcal{S}_{n+1} \subset FixT_{n+1}R_n \subset FixR_{n+1},$$

skąd $R_{n+1}C = Fix\mathcal{S}_{n+1} = FixR_{n+1}$, czyli R_{n+1} jest rzeczywiście retrakcją na zbiór $Fix\mathcal{S}_{n+1}$.

Żeby zakończyć dowód musimy wykazać nieoddalanie R_{n+1}. Zauważmy, że z równania 4.4 mamy

$$
\begin{aligned}
\|F_\lambda x - F_\lambda y\| &= \left\|\lambda(x-y) + \overline{\lambda}(T_{n+1}R_nF_\lambda x - T_{n+1}R_nF_\lambda y)\right\| \\
&\leq \lambda \|x-y\| + \overline{\lambda} \|F_\lambda x - F_\lambda y\| .
\end{aligned}
$$

Odejmując stronami wnioskujemy, że F_λ jest przekształceniem nieoddalającym, a co za tym idzie jest to prawdą także dla G_m. Teraz wystarczy wykorzystać lemat 4.4.7. □

Teraz mamy

Twierdzenie 4.4.10. *Niech dany będzie τ-zwarty, wypukły i ograniczony podzbiór C przestrzeni Banacha, w którym norma jest τ-dolnie półciągła. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną przemiennych, τ-ciągłych, nieoddalających przekształceń zbioru C. Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest nieoddalającym retraktem zbioru C.*

Dowód. Z lematu 4.4.9 wnioskujemy, że $\mathcal{S}$ ma własność skończonych nieoddalających retrakcji. Dlatego możemy wykorzystać lemat 4.3.7, żeby otrzymać tezę twierdzenia. □

Uwaga 4.4.11. *Warunku τ-ciągłości nie da się opuścić. Inaczej ograniczając się do jednego przekształcenia otrzymalibyśmy twierdzenie mówiące, że każda przestrzeń Banacha ma τ-FPP (dla topologii, przy których norma jest τ-dolnie półciągła). Kontrprzykładem do takiego twierdzenia jest chociażby przekształcenie piekarza wskazane przez Alspacha w [Al]. Podobnie wiadomo, że przestrzeń $\ell_1 = c_0^*$ nie posiada w^*-FPP (patrz [Si]).*

Uwaga 4.4.12. *Warunku nieoddalania także nie da się opuścić w ogólnym przypadku. Bez niego nie otrzymamy nie tylko nieoddalającej retrakcji, ale nawet ciągłej. Niech $\ell_1 = c_0^*$. Na kuli jednostkowej tej przestrzeni zdefiniujmy słabo* ciągłe przekształcenie*

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_1^2, 0, x_2, x_3, ...).$$

Wtedy $FixT = \{(0, 0, ...), (1, 0, ...)\}$ jest zbiorem niespójnym i R nie może być przekształceniem ciągłym.

Twierdzenie 4.4.10 ukazało się po raz pierwszy w [Bo].

4.4.4 Twierdzenie o nieoddalającej retrakcji a centrum Czebyszewa

Okazuje się, że w słabej* topologii można otrzymać twierdzenia związane z centrum Czebyszewa. Wynikają one z poniższych własności ([BaGeMo]):

Lemat 4.4.13. *W dualnej przestrzeni Banacha, $\mathcal{C}(A)$, centrum Czebyszewa dowolnego niepustego i ograniczonego zbioru A, jest zbiorem:*

- *niepustym,*
- *wypukłym,*
- *słabo* zwartym, a przez to*
- *ograniczonym.*

Przypomnijmy definicję centrum Czebyszewa.

Definicja 4.4.14. *Centrum Czebyszewa zbioru A w przestrzeni E nazywamy zbiór*

$$\mathcal{C}(A) = \{c \in E : A \subset \mathbb{B}(c, r(A))\},$$

gdzie $\mathbb{B}(x, r)$ oznacza domkniętą kulę o środku x i promieniu r, natomiast $r(A)$ jest promieniem Czebyszewa zbioru A:

$$r(A) = \inf \{r > 0 : \exists_{x \in E} A \subset \mathbb{B}(x, r)\}.$$

Twierdzenie 4.4.15. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przemienną rodziną słabo* ciągłych, nieoddalających przekształceń dualnej przestrzeni Banacha. Ponadto niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną suriekcji na ograniczonym zbiorze A. Wtedy $\mathcal{S}$ posiada punkt stały, który leży w $\mathcal{C}(A)$.*

Dowód. Jak już wiemy $\mathcal{C}(A)$ spełnia wszystkie warunki twierdzenia 4.4.10. Dlatego pozostaje nam pokazać, że centrum $\mathcal{C}(A)$ jest niezmiennicze dla $\mathcal{S}$. Weźmy więc $T \in \mathcal{S}$. Jeśli r jest promieniem Czebyszewa zbioru A oraz $c \in \mathcal{C}(A)$, to z faktu $A \subset \mathbb{B}(c, r)$ wnioskujemy

$$A = TA \subset T\mathbb{B}(c, r) \subset \mathbb{B}(Tc, r).$$

Ostatnie zawieranie jest prawdą, gdyż jeśli $z \in T\mathbb{B}(c, r)$, to istnieje $x \in \mathbb{B}(c, r)$ dla którego $z = Tx$. Stąd

$$\|Tc - z\| = \|Tc - Tx\| \leq \|c - x\| \leq r,$$

czyli rzeczywiście $z \in \mathbb{B}(Tc, r)$. Ostatecznie mamy $A \subset \mathbb{B}(Tc, r)$, a to znaczy $Tc \in \mathcal{C}(A)$. Z dowolności wyboru T i c wynika, że $\mathcal{C}(A)$ jest niezmiennicze dla $\mathcal{S}$. □

Zwróćmy jeszcze uwagę na

Twierdzenie 4.4.16. *Niech $\mathcal{S}$ będzie przemienną rodziną słabo* ciągłych, nieoddalających przekształceń dualnej przestrzeni Banacha. Ponadto niech istnieje słabo* zwarty zbiór C, niezmienniczy dla $\mathcal{S}$. Wtedy $\mathcal{S}$ posiada wspólny punkt stały.*

Dowód. Skoro $\mathcal{S}$ komutuje, możemy otrzymać słabo* zwarty, a więc i ograniczony zbiór $B \subset C$, na którym $\mathcal{S}$ jest suriekcją. Możemy więc wykorzystać dla tego zbioru twierdzenie 4.4.15, żeby otrzymać punkt stały. □

Uwaga 4.4.17. *Nie możemy tym razem wnioskować istnienia punktu stałego rodziny $\mathcal{S}$ wewnątrz $\mathcal{C}(C)$, gdyż własność centrum Czebyszewa nie jest monotoniczna w następującym sensie*

$$A \subset B \not\Rightarrow \mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B).$$

Powyższe twierdzenie i wcześniejsze wyniki sugerują, że słaba* zwartość jest wystarczająca do tego, żeby wspólny punkt stały „istniał", ale do tego żeby znajdował się w dziedzinie rodziny wymagana jest jeszcze wypukłość. Nasuwa się tu skojarzenie z ciągami Cauchy'ego - żeby ich granica należała do przestrzeni (czyli żebyśmy mogli efektywnie mówić o istnieniu tej granicy), to owa przestrzeń musi być zupełna. Niestety w naszym przypadku nie posiadamy operacji analogicznej do uzupełniania przestrzeni (operacja otoczki wypukłej rodzi oczywiste problemy).

4.4.5 Inne uogólnienia twierdzenia o nieoddalającej retrakcji

Regularne nieoddalanie

Idea dowodu poniższego lematu pochodzi z [Br3]:

Lemat 4.4.18. *Przekształcenie F_λ z dowodu lematu 4.4.9 jest regularnie nieoddalające.*

Dowód. Ustalmy $x, y \in C$. Przypomnijmy równanie (4.4) (dla wygody $S = T_{n+1}R_n$):

$$F_\lambda x = \lambda x + \overline{\lambda} S F_\lambda x.$$

Ustalmy $t \in (0, 1)$ i zdefiniujmy

$$p = tx + \overline{t} F_\lambda x.$$

Mamy stąd

$$F_\lambda x = \lambda\left(\frac{1}{t}p - \frac{\overline{t}}{t}F_\lambda x\right) + \overline{\lambda}SF_\lambda x.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$F_\lambda x = \frac{\lambda}{t+\lambda\overline{t}}p + \frac{\overline{\lambda}t}{t+\lambda\overline{t}}SF_\lambda x.$$

Przyjmijmy $\beta = \frac{\lambda}{t+\lambda\overline{t}}$. Zauważmy, że

$$\overline{\beta} = \frac{t+\lambda\overline{t}-\lambda}{t+\lambda\overline{t}} = \frac{t+\lambda-\lambda t-\lambda}{t+\lambda\overline{t}} = \frac{\overline{\lambda}t}{t+\lambda\overline{t}}.$$

Dlatego mamy $F_\lambda x = \beta p + \overline{\beta}SF_\lambda x$. Łatwo stwierdzić, że $\beta \in (0,1)$. Stąd tak jak wcześniej, kontrakcja

$$Q(x) = \beta p + \overline{\beta}Sx$$

posiada dokładnie jeden punkt stały $F_\beta p$. Jak pokazaliśmy wyżej, $F_\lambda x$ jest też punktem stałym $Q(x)$ i z jednoznaczności punktu stałego mamy $F_\lambda x = F_\beta p$. Prowadząc analogiczne rozumowanie dla $q = ty + \overline{t}F_\lambda y$ w miejsce p i y w miejsce x, otrzymujemy $F_\lambda y = F_\beta q$. Dlatego

$$\begin{aligned}\|F_\lambda x - F_\lambda y\| &= \|F_\beta p - F_\beta q\| \leq \|p-q\| \\ &= \left\|t(x-y) + \overline{t}(F_\lambda x - F_\lambda y)\right\|.\end{aligned}$$

Dowolność wyboru t gwarantuje prawdziwość twierdzenia. □

Stąd w silnej topologii otrzymujemy mocniejszy wynik (porównaj też z [Br3][Twierdzenie 3]).

Twierdzenie 4.4.19. *Niech dany będzie zwarty, wypukły i ograniczony podzbiór C przestrzeni Banacha. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną przemiennych, nieoddalających przekształceń zbioru C. Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest regularnie nieoddalającym retraktem zbioru C.*

Dowód. Skoro wiemy, że F_λ jest regularnie nieoddalające, jest to też prawdą dla każdego G_m z dowodu lematu 4.4.9. Stąd dowodzimy regularnego nieoddalania R_{n+1} w taki sam sposób, jak w twierdzeniu 4.3.8. Następnie wystarczy wykorzystać samo twierdzenie 4.3.8, by rozciągnąć wynik na rodziny nieskończone. □

Rozszerzenie na rodziny niekoniecznie komutujące

Analiza dowodu lematu 4.4.9 pokazuje, że własność przemienności została wykorzystana tylko jeden raz poprzez użycie lematu 4.4.5 tak, żeby otrzymać równanie (4.6). Dlatego mamy twierdzenie dla klasy rodzin (potencjalnie) szerszej niż rodziny przemienne:

Twierdzenie 4.4.20. *Niech dany będzie τ-zwarty, wypukły i ograniczony podzbiór C przestrzeni Banacha, w którym norma jest τ-dolnie półciągła. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną τ-ciągłych, nieoddalających przekształceń zbioru C o następującej własności:*

($\mathcal{W}$) *Niech $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ będzie skończone oraz $T \in \mathcal{S}$. Wtedy za każdym razem, kiedy $R : C \to Fix\mathcal{P}$ jest nieoddalającą retrakcją oraz (a_n) jest ciągiem przybliżonych punktów stałych złożenia TR, to (a_n) jest także ciągiem przybliżonych punktów stałych rodziny $\mathcal{P} \cup \{T\}$.*

Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest nieoddalającym retraktem C.

Pochylmy się nad własnością ($\mathcal{W}$). Rzeczywiście, jest to własność nietrywialna w tym sensie, że przysługuje nie tylko przemiennym półgrupom przekształceń.

Definicja 4.4.21 (Lewostronnie niezmiennicza półgrupa)**.** *Powiemy że półgrupa $\mathcal{S}$ jest lewostronnie niezmiennicza, jeśli dla dowolnych $T, S \in \mathcal{S}$ zachodzi $TS = S$.*

Tak więc w szczególności nieprzemienna, lewostronnie odwracalna półgrupa z przykładu 2.2.4 jest według powyższej definicji lewostronnie niezmiennicza.

Twierdzenie 4.4.22. *Niech dany będzie τ-zwarty, wypukły i ograniczony podzbiór C przestrzeni Banacha, w którym norma jest τ-dolnie półciągła. Niech $\mathcal{S}$ będzie rodziną τ-ciągłych nieoddalających przekształceń zbioru C. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{S}$ jest lewostronnie niezmiennicza. Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest nieoddalającym retraktem C.*

Dowód. Musimy jedynie wykazać, że $\mathcal{S}$ posiada własność $(\mathcal{W})$. Niech więc $T \in \mathcal{S}$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ będzie skończone. Niech ponadto $R : C \to Fix\mathcal{P}$ będzie nieoddalającą retrakcją, a (a_n) ciągiem przybliżonych punktów stałych złożenia TR. Stąd dla dowolnego $S \in \mathcal{P}$

$$\begin{aligned}\|Sx_n - x_n\| &\leq \|Sx_n - TRx_n\| + \|TRx_n - x_n\| \\ &= \|Sx_n - STRx_n\| + \|TRx_n - x_n\| \\ &\leq 2\,\|TRx_n - x_n\| \to 0.\end{aligned}$$

Tak więc (x_n) jest $AFPS$ dla $\mathcal{P}$. Podobnie dla T:

$$\begin{aligned}\|Tx_n - x_n\| &\leq \|Tx_n - Sx_n\| + \|Sx_n - x_n\| \\ &= \|Tx_n - TSx_n\| + \|Sx_n - x_n\| \\ &\leq 2\,\|Sx_n - x_n\| \to 0.\end{aligned}$$

□

Zauważmy, że dla półgrup, które są co najwyżej przeliczalne zachodzi inne uogólnienie lematu 4.4.9, które wymaga warunku słabszego niż własność $(\mathcal{W})$. Wynika to z wniosku 4.3.5.

Twierdzenie 4.4.23. *Niech dany będzie τ-zwarty, wypukły i ograniczony podzbiór C przestrzeni Banacha, w którym norma jest τ-dolnie półciągła. Niech $\mathcal{S}$ będzie co najwyżej przeliczalną rodziną τ-ciągłych, nieoddalających przekształceń zbioru C. Załóżmy, że rodzinę $\mathcal{S}$ można ustawić w ciąg $(T_n)_n$ tak, żeby zachodziło*

$(\mathcal{W}')$ *Jeśli R_m jest nieoddalającą retrakcją na zbiór punktów stałych odcinka początkowego A_m, to każdy ciąg przybliżonych punktów stałych złożenia $T_{m+1}R_m$ jest także ciągiem przybliżonych punktów stałych odcinka początkowego A_{m+1}.*

Wtedy $Fix\mathcal{S}$ jest nieoddalającym retraktem zbioru C.

4.5 Uogólnienie twierdzenia Brucka o nieoddalającej retrakcji dla półgrup przemiennych

Istnieje schemat dowodzenia, który w pewnych przypadkach pozwala rozciągnąć twierdzenia o retrakcjach dla pojedynczych przekształceń na skończone rodziny przekształceń.

Lemat 4.5.1. *Dowolna przemienna rodzina $\mathcal{S}$ przekształceń zbioru C posiada następującą własność:*

($\mathcal{B}$) *Niech $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ będzie skończone oraz $T \in \mathcal{S}$. Wtedy za każdym razem, kiedy $R : C \to Fix\mathcal{P}$ jest retrakcją, zachodzi*

$$FixT \cap Fix\mathcal{P} = Fix(TR).$$

Dowód. Inkluzja w prawą stronę, to po prostu lemat 4.4.8. Jeśli chodzi o inkluzję w drugą stronę załóżmy, że $x \in Fix(TR)$, czyli $TRx = x$. Wtedy dla każdego $P \in \mathcal{P}$, z przemienności i faktu $Rx \in FixP$ wynika, że

$$PTRx = TPRx = TRx.$$

Czyli $TRx \in FixP$ i z dowolności P mamy

$$x = TRx \in Fix\mathcal{P}.$$

Ponieważ R jest retrakcją na $Fix\mathcal{P}$, wnioskujemy $Rx = x$, a stąd także $Tx = x$, czyli $x \in FixT \cap Fix\mathcal{P}$. Dowodzi to inkluzji i kończy cały dowód. □

Twierdzenie 4.5.2. *Niech półgrupa przekształceń $\mathcal{A} \subset C^C$ posiada następującą własność*[3]

$$\forall_{T \in A} \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

Wtedy dla dowolnej skończonej rodziny $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ o własności ($\mathcal{B}$) zachodzi

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

[3]Patrz definicja 4.3.2.

Dowód. Jeśli rodzina $\mathcal{S}$ składa się tylko z jednego przekształcenia, wtedy twierdzenie zachodzi wprost z założeń. Załóżmy więc, że twierdzenie jest prawdziwe dla rodzin n-elementowych i rozważmy następującą rodzinę $\mathcal{S}_{n+1} = \{T_1, ..., T_{n+1}\} \subset \mathcal{A}$ o własności $(\mathcal{B})$ i podrodzinę $\mathcal{S}_n = \{T_1, ..., T_n\}$. Wtedy z hipotezy indukcyjnej istnieje retrakcja $R_n \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_n) \cap \mathcal{A}$. Ponieważ $\mathcal{A}$ jest półgrupą, to $T_{n+1}R_n \in \mathcal{A}$. Stąd na mocy założeń twierdzenia mamy retrakcję

$$R_{n+1} : C \to Fix(T_{n+1}R_n).$$

Z własności $(\mathcal{B})$ zachodzi $Fix(T_{n+1}R_n) = Fix\mathcal{S}_{n+1}$, więc $R_{n+1} \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_{n+1})$ □

Pomysł jest taki, że $\mathcal{A}$ jest rodziną przekształceń o pewnych „porządnych" własnościach, takich jak nieoddalanie, afiniczność, itd. Niestety powyższe rozumowanie zawiedzie, jeśli rodzina $\mathcal{A}$ nie posiada struktury półgrupy albo precyzyjniej – nie będziemy w stanie stwierdzić faktu $T_{n+1}R_n \in \mathcal{A}$. W takich wypadkach musimy szukać bardziej wyrafinowanych sposobów na wygenerowanie odpowiedniego R_n.

Powyższy schemat dowodzenia (w mniej wyabstrahowanej formie) pochodzi od Brucka [Br2]. Pokazał on go dla rodzin przemiennych.

Lemat 4.5.3. *Własność $(\mathcal{W})$ implikuje następujący wariant własności $(\mathcal{B})$:*

> *Niech $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ będzie skończone oraz $T \in \mathcal{S}$. Wtedy za każdym razem, kiedy $R : C \to Fix\mathcal{P}$ jest nieoddalającą retrakcją, zachodzi*
>
> $$FixT \cap Fix\mathcal{P} = Fix(TR).$$

Dowód. Zakładając własność $(\mathcal{W})$, chcemy udowodnić

$$FixT \cap Fix\mathcal{P} = Fix(TR).$$

Inkluzja w prawą stronę jest już udowodniona (lemat 4.4.8). Załóżmy więc, że $x \in Fix(TR)$. Ciąg (x_n) tożsamościowo równy x jest oczywiście ciągiem przybliżonych punktów stałych przekształcenia TR. A więc z własności $(\mathcal{W})$ ciąg (x_n) jest ciągiem przybliżonych punktów stałych rodziny $\{T\} \cup \mathcal{P}$. Stąd $x \in FixT \cap Fix\mathcal{P}$. □

Wniosek 4.5.4. *Niech półgrupa nieoddalających przekształceń* $\mathcal{A} \subset C^C$ *posiada następującą własność:*

$$\forall_{T \in A} \mathcal{R}(T) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

Wtedy dla dowolnej skończonej rodziny $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$*, która posiada własność* $(\mathcal{W})$*, zachodzi*

$$\mathcal{R}(\mathcal{S}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset.$$

Przejdźmy teraz do twierdzenia 1 z publikacji [Br2]. Szczegółowa analiza pokazuje, że w całym rozumowaniu założenie o przemienności zostało użyte tylko raz oraz, że z pomocą powyższego wniosku łatwo można je zastąpić założeniem o własności $(\mathcal{W})$ - w dowodzie twierdzenia 1 zmieniają się cztery pierwsze akapity, reszta pozostaje taka sama. Stąd otrzymujemy

Twierdzenie 4.5.5. *Niech domknięty i wypukły zbiór* C *posiada FPP i CFPP, będzie w-zwarty lub ograniczony i ośrodkowy. Wtedy dla dowolnej rodziny* $\mathcal{S}$ *nieoddalających przekształceń o własności* $(\mathcal{W})$*, zbiór* $Fix\mathcal{S}$ *jest nieoddalającym retraktem zbioru* C*.*

Rozdział 5

Hipoteza Lau

5.1 Wprowadzenie

Zaczniemy od podania wygodnej definicji:

Definicja 5.1.1 (Reprezentacja Lau). *Niech S będzie półgrupą, a $\mathcal{S}$ jej reprezentacją która, składa się z nieoddalających przekształceń słabo* zwartego, wypukłego podzbioru dualnej przestrzeni Banacha. Jeśli jest to reprezentacja ciągła, gdy rozważamy C z topologią słabą*, to powiemy, że $\mathcal{S}$ jest reprezentacją Lau półgrupy S.*

Reprezentacja Lau zawężona do zbiorów o danej własności $\mathcal{X}$ oznacza reprezentację opisaną jak wyżej z tym, że C posiada dodatkowo własność $\mathcal{X}$. Podobnie definiujemy reprezentacje Lau zawężone do przekształceń o danej własności.

Zauważmy, że przy takiej definicji, elementy reprezentacji Lau są zawsze słabo*-ciągłe. Wynika to z faktu, że ciągłość reprezentacji $(s, x) \mapsto T_s x$ implikuje ciągłość w drugim argumencie, co w tym przypadku oznacza słabą* ciągłość.

Wiadomo, że zachodzi (por. wprowadzenie niniejszej pracy, a także [LaTa2][strona 528])

Twierdzenie 5.1.2. *Jeśli każda reprezentacja Lau danej półgrupy S posiada punkt stały, to wtedy S dopuszcza lewostronnie niezmienniczą średnią.*

Żeby potwierdzić hipotezę Lau (w wersji, w jakiej została przedstawiona w [LaZh]), należy udowodnić odwrócenie powyższej implikacji, to jest następujące stwierdzenie:

> *Jeśli S jest półgrupą dopuszczającą lewostronnie niezmienniczą średnią, to każda jej reprezentacja Lau posiada punkt stały.*

W następnym podrozdziale podsumowane zostaną dotychczasowe wyniki związane z prawdziwością hipotezy.

5.2 Częściowe wyniki

Przypomnijmy wspomniane w rozdziale pierwszym twierdzenie Daya:

Twierdzenie 5.2.1. *Półgrupa dopuszcza lewostronnie niezmienniczą średnią wtedy i tylko wtedy, gdy każda jej ciągła reprezentacja będąca rodziną afinicznych przekształceń zwartego i wypukłego podzbioru lokalnie wypukłej przestrzeni liniowo-topologicznej posiada punkt stały.*

Na początek warto zauważyć

Twierdzenie 5.2.2. *Jeśli S jest półgrupą dopuszczającą lewostronnie niezmienniczą średnią, to każda reprezentacja Lau tej półgrupy, która jest zawężona do przekształceń afinicznych posiada punkt stały.*

Dowód. Jest to po prostu szczególny przypadek twierdzenia 5.2.1 Daya o punkcie stałym. □

Innymi słowy, afiniczne reprezentacje Lau są „reprezentacjami Daya" (dla półgrup dopuszczających lewostronnie niezmienniczą średnią).

W [LaTa][Twierdzenie 5.3] pokazano następujący wynik częściowy.

Twierdzenie 5.2.3. *Jeśli S jest półgrupą dopuszczającą lewostronnie niezmienniczą średnią, to każda reprezentacja Lau tej półgrupy, która jest zawężona do zbiorów ośrodkowych (w normie) posiada punkt stały.*

Twierdzenie 4.4.10 potwierdza hipotezę dla półgrup przemiennych (które jak wiemy dopuszczają lewostronnie niezmienniczą średnią).

Twierdzenie 5.2.4. *Dowolna reprezentacja Lau półgrupy przemiennej posiada punkt stały.*

Dowód. Jest to po prostu twierdzenie 4.4.10 z topologią $\tau = w^*$. Możemy dokonać takiego podstawienia, ponieważ w topologii słabej* norma jest dolnie półciągła. $\square$

Wynik ten został zaprezentowany po raz pierwszy w [BoWi]. Praca [BoWi2] udowadnia natomiast

Twierdzenie 5.2.5. *Jeśli S jest półgrupą dopuszczającą lewostronnie niezmienniczą średnią, to każda reprezentacja Lau tej półgrupy, która jest zawężona do przekształceń generowanych przez przekształcenia regularnie nieoddalające posiada punkt stały.*

Dowód. Niech $\mathcal{S}$ będzie reprezentacją, jak w założeniach twierdzenia. Oznacza to, że jest to półgrupa przekształceń wypukłego, słabo* zwartego (a co za tym idzie ograniczonego) zbioru C, której generatory są słabo* ciągłymi, regularnie nieoddalającymi przekształceniami. Jak wiemy półgrupy dopuszczające lewostronnie niezmienniczą średnią mają własność $(\mathcal{SC})$ (twierdzenie 2.3.10). W naszym przypadku oznacza to, że istnieje słabo* zwarty podzbiór A, na którym $\mathcal{S}$ jest suriekcją. Podsumowując:

- $\mathcal{S}$ jest generowane przez przekształcenia regularnie nieoddalające,
- C jest ograniczone,
- $\mathcal{S}$ staje się suriekcją na zbiorze $A \subset C$.

Spełnione są więc wszystkie założenia jednego z wariantów twierdzenia 3.4.8. Po jego zastosowaniu dostajemy punkt stały na $A \subset C$, co kończy dowód. $\square$

Analogicznie mamy

Twierdzenie 5.2.6. *Jeśli S jest półgrupą dopuszczającą lewostronnie niezmienniczą średnią, to każda reprezentacja Lau tej półgrupy, która jest zawężona do przekształceń generowanych przez przekształcenia uśrednione nieoddalające posiada punkt stały.*

Dowód. Tym razem zachodzi:

- $\mathcal{S}$ jest generowane przez przekształcenia uśrednione nieoddalające,
- C jest ograniczone i wypukłe,
- istnieje $A \subset C$ na którym $\mathcal{S}$ staje się suriekcją.

Stosujemy znowu twierdzenie 3.4.8. □

Jak już wiemy, z rodziny przekształceń nieoddalających $\mathcal{S}$ w oczywisty sposób potrafimy stworzyć półgrupę $\hat{\mathcal{S}}$ generowaną przez uśrednione przekształcenia utworzone z $\mathcal{S}$. Zachodzi wtedy $Fix\mathcal{S} = Fix\hat{\mathcal{S}}$. Podobnie możemy utworzyć półgrupę przekształceń generowaną przez przekształcenie regularnie nieoddalające, która zachowuje punkty stałe półgrupy wyjściowej. Dlatego można pomyśleć, że żeby otrzymać potwierdzenie hipotezy Lau, wystarczy przekształcić $\mathcal{S}$ na $\hat{\mathcal{S}}$ i zastosować twierdzenie 5.2.5 lub 5.2.6. Niestety nie jest to prawdą, gdyż nie mamy twierdzenia mówiącego o tym, że $\hat{\mathcal{S}}$ będzie dalej reprezentacją (która ponadto jest ciągła), a co za tym idzie, nie możemy wykorzystać twierdzenia 2.3.10.

Zauważmy, że mamy jeszcze nowe rezultaty wynikające z twierdzenia 4.4.20.

Twierdzenie 5.2.7. *Jeśli S jest półgrupą dopuszczającą lewostronnie niezmienniczą średnią, to każda reprezentacja Lau tej półgrupy o własności $(\mathcal{W})$ posiada punkt stały.*

Teraz naturalna wydaje się

Definicja 5.2.8. *Powiemy, że półgrupa S ma własność $(\mathcal{W})$, jeśli każda jej reprezentacja Lau posiada własność $(\mathcal{W})$.*

Tak więc przykładowo półgrupy przemienne oraz półgrupy lewostronnie niezmiennicze posiadają własność $(\mathcal{W})$.

Twierdzenie 5.2.9. *Jeśli S jest półgrupą o własności $(\mathcal{W})$, to jest półgrupą dopuszczającą lewostronnie niezmienniczą średnią.*

Dowód. Niech $\mathcal{S}$ będzie reprezentacją Lau półgrupy S. Oznacza to, że $\mathcal{S}$ spełnia warunki twierdzenia 4.4.20, a co za tym idzie posiada punkt stały. Z dowolności wyboru reprezentacji Lau $\mathcal{S}$ i korzystając z twierdzenia 5.1.2, otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Łatwo zauważyć, że półgrupy lewostronnie niezmiennicze (patrz definicja 4.4.21) są lewostronnie odwracalne, ale z powyższego mamy także

Wniosek 5.2.10. *Półgrupy lewostronnie niezmiennicze dopuszczają lewostronnie niezmienniczą średnią.*

Jednakże warto zauważyć

Twierdzenie 5.2.11. *Istnieją półgrupy lewostronnie odwracalne, które nie posiadają własności $(\mathcal{W})$.*

Dowód. Jeśli powyższe stwierdzenie byłoby fałszywe, to z twierdzenia 5.2.9 wynikałoby, że dowolna reprezentacja Lau półgrupy lewostronnie odwracalnej posiadałaby punkt stały. Z twierdzenia 5.1.2 oznaczałoby to, że taka półgrupa dopuszczałaby lewostronnie niezmienniczą średnią. Ale w ogólnym przypadku nie jest to prawdą ([LaZh]). □

Naturalne wydaje się teraz pytanie, czy te półgrupy, które dopuszczają lewostronnie niezmienniczą średnią i które spełniają Hipotezę Lau, nie są dokładnie tymi półgrupami, które posiadają własność $(\mathcal{W})$. Innymi słowy, czy hipoteza Lau nie jest równoważna stwierdzeniu, że dopuszczanie lewostronnie niezmienniczej średniej jest tożsame własności $(\mathcal{W})$. Łatwo zauważyć, że odpowiedź byłaby twierdząca, gdyby każda półgrupa przekształceń posiadająca punkt stały miała własność $(\mathcal{W})$. Jednakże nie jest to prawdą.

Przykład 5.2.12. *Niech $\mathbb{B}$ będzie kulą jednostkową w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ z normą supremum i na owej kuli zdefiniujmy:*

$$S(x,y) = (x,-y),$$

$$T(x,y) = (x,x).$$

Wtedy $FixS = \langle 0,1\rangle \times 0$ i $R(x,y) = (x,0)$ jest nieoddalającą retrakcją $\mathbb{B}$ na $FixS$. Zauważmy, że $TR(a,a) = T(a,0) = (a,a)$, ale $S(a,a) = (a,-a)$ i kładąc $a \neq 0$ widzimy, że półgrupa generowana przez T i S nie czyni zadość własności $(\mathcal{W})$, natomiast posiada wspólny punkt stały $(0,0)$.

Ponieważ powyższa półgrupa nie jest lewostronnie odwracalna, a co za tym idzie nie dopuszcza lewostronnie niezmienniczej średniej, przykład nie wyklucza prawdziwości alternatywnego sformułowania hipotezy Lau. Jednakże sugeruje nietrywialność ewentualnego dowodu.

Na koniec należy dodać, że od czasu napisania pierwszej wersji tej rozprawy ukazały się w Proc. AMS dwie prace K. Salame [Sa1, Sa2], w których twierdzi on, że udowodnił hipotezę Lau (odpowiednio w przypadku dyskretnym i ogólnym). Jednak na stronie 6_2 w [Sa1], $\Psi_{t'}(e_{t'})$ może być dowolnie duże i dlatego oszacowanie

$$\|\sigma_s(\phi(x)_{i_t}) - \phi(ss,x)_{i_t}\| \leq 2\varepsilon$$

nie jest poprawne. Podobnie na stronie 2006_{10-11} w [Sa2], porządek indeksów w całkowej nierówności Minkowskiego nie jest przestawiony i stąd oszacowanie

$$\begin{aligned} &\Big(\textstyle\sum_{i=1}^{n_{j_\alpha}}(\sum_{i'=1}^{n_{j_{\alpha'}}} t_{i'}^{j_{\alpha'}}\langle e^{i,i'},j\rangle(s_i^{j_\alpha}.x_0 - s_{i'}^{j_{\alpha'}}.x_0))^2\Big)^{1/2} \\ \leq\; &\textstyle\sum_{i=1}^{n_{j_\alpha}}\Big(\sum_{i'=1}^{n_{j_{\alpha'}}}(t_{i'}^{j_{\alpha'}}\langle e^{i,i'},j\rangle(s_i^{j_\alpha}.x_0 - s_{i'}^{j_{\alpha'}}.x_0))^2\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

jest nieprawidłowe. W obecnej chwili Autor tych artykułów pracuje nad poprawieniem błędów, ale wydaje się, że będzie to bardzo trudne.

Tak więc w swojej ogólnej wersji hipoteza Lau wciąż czeka na rozwiązanie.

Bibliografia

[Al] D. E. Alspach, A Fixed Point Free Nonexpansive Map, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 82, No. 3 (1981), 423–424.

[AnIs] K. Anzai, S. Ishikawa, On common fixed points for several continuous affine mappings, Pacific Journal of Mathematics 72 (1977), 1–4.

[ArLoMa] D. Ariza-Ruiz, G. López-Acedo, V. Martín-Márquez, Firmly nonexpansive mappings, Journal of nonlinear and convex analysis, 15 (2014), 61–87.

[BaGeMo] U. Bader, T. Gelander, N. Monod, A fixed point theorem for L_1 spaces, Inventiones Mathematicae 189 (2012), 143–148.

[Bo] S. Borzdyński, Common fixed point theorems for nonexpansive mappings using the lower semicontinuity property, Colloquium Mathematicum 154 (2018), 157–165.

[BoWi] S. Borzdyński, A.Wiśnicki, A common fixed point theorem for a commuting family of weak* continuous nonexpansive mappings, Studia Mathematica 225 (2014), 173–181.

[BoWi2] S. Borzdyński, A.Wiśnicki, Applications of uniform asymptotic regularity to fixed point theorems, Journal of Fixed Point Theory and Applications 18 (2016), 855–866.

[Br] R. E. Bruck, Properties of fixed-point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces, Transactions of the American Mathematical Society 179 (1973), 251-262.

[Br2] R. E. Bruck, Jr., A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings, Pacific Journal of Mathematics 53 (1974), 59–71.

[Br3] R. E. Bruck, Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces, Pacific Journal of Mathematics 47 (1973), no. 2, 341–355.

[BrPe] F. E. Browder, W. V. Petryshyn, The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces, Bulletin of the American Mathematical Society 72 (1966), 571–575.

[BuKo] M. Bukatin, R. Kopperman, S. Matthews, H. Pajoohesh, Partial Metric Spaces, The American Mathematical Monthly 116(8) (2009), 708-718.

[Da] M. M. Day, Fixed-point theorems for compact convex sets, Illinois Journal of Mathematics 5 (1961), no. 4, 585–590.

[Da2] M. M. Day, Amenable semigroups, IIllinois Journal of Mathematics 1 (1957), no. 4, 509–544.

[Da3] M. M. Day, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 51, No. 2 (Mar., 1942), 399–412.

[Du] R. M. Dudley, Real Analysis and Probability, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[EdOb] M. Edelstein, R. C. O'Brien, Nonexpansive mappings, asymptotic regularity and successive approximations, Journal of the London Mathematical Society (2) 17 (1978), no. 3, 547–554.

[FrHu] H. Freundenthal; W. Hurewicz, Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien, Fundamenta Mathematicae 26 (1936), 120-122.

[GoKi] K. Goebel, W. A. Kirk, Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[GoKi2] K. Goebel, W. A. Kirk, Iteration processes for nonexpansive mappings, in: Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis, S. P. Singh, S. Thomeier, B. Watson (eds.), AMS, Providence, R.I., 1983, 115–123.

[GrDu] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-Verlag, New York, 2003.

[Is] S. Ishikawa, Fixed points and iteration of a nonexpansive mapping in a Banach space, Proceedings of the American Mathematical Society 59 (1976), no. 1, 65–71.

[Kr] M. A. Krasnoselskii, Two observations about the method of successive approximations, Uspekhi Matematicheskikh Nauk 10 (1955), 123–127.

[Kra] M. Kraus, A note on the uniform approximation of continuous affine functions, Expositiones Mathematicae 27 (2009), 73–78.

[La] A.T.-M. Lau, Amenability and fixed point property for semigroup of nonexpansive mappings, Fixed Point Theory and Applications (in: M. A. Thera, J.B. Baillon), Pitman Research Notes Mathematical Series, 252 (1991), 303 - 313.

[LaTa] A. T.-M. Lau, W. Takahashi, Invariant means and fixed point properties for non-expansive representations of topological semigroups, Topological Methods in Nonlinear Analysis 5 (1995), 39–57.

[LaTa2] A. T.-M. Lau, W. Takahashi, Fixed point and non-linear ergodic theorems for semigroups of non-linear mappings, in: Handbook of Metric Fixed Point Theory, W. A. Kirk, B. Sims (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001, 515–553.

[LaZh] A.T.-M. Lau, Y. Zhang, Fixed point properties for semigroups of nonlinear mappings and amenability, Journal of Functional Analysis 263 (2012), 2949–2977.

[Ph] V.Q. Phóng, Nonlinear almost periodic actions of semigroups, in Functional Analysis, K.D. Bierstedt at al. (eds.), Marcel Dekker, 1994, 71–94.

[ReSh] S. Reich, I. Shafrir, The asymptotic behavior of firmly nonexpansive mappings. Proceedings of the American Mathematical Society 101 (1987), 246–250.

[Sa1] K. Salame, On Lau's conjecture, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), 343–350.

[Sa2] K. Salame, On Lau's conjecture II, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020), 1999–2008.

[SaVe] B. Samet, C. Vetro, F. Vetro, From metric spaces to partial metric spaces, Fixed Point Theory and Applications 2013, 2013:5.

[Si] B. Sims, Examples of fixed point free mappings, in Handbook of Metric Fixed Point Theory, W. A. Kirk, B. Sims (eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001, 35–48.

[XuYa] H.-K. Xu, I. Yamada, Asymptotic regularity of linear power bounded operators, Taiwanese Journal Of Mathematics Vol. 10, No. 2, 417-429, February 2006.

[Sm] M. Smoleń-Wawrzusiszyn, Czy grupa może być średniowalna? Głos w sporze o nowy termin w matematyce., Poradnik Językowy, 2021, z. 4, s. 75-83.